УДК 519.21

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ В МОДЕЛИ СО СТРАХОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ РИСКОВ В РАМКАХ ОДНОГО ДОГОВОРА

Муромская А.А.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 10.11.2016, после переработки 05.12.2016.

В работе рассматривается деятельность компании, занимающейся комбинированным страхованием. Каждый из нескольких рисков в рамках договора комбинированного страхования может быть перестрахован отдельно в соответствии с произвольным видом перестрахования, параметры которого выбираются динамически. Основная задача заключается в поиске оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей вероятность неразорения страховой компании. Получено уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для данной задачи и доказано существование и единственность его решения. Также установлен вид оптимальной стратегии перестрахования и приведены численные результаты для частного случая распределения рисков.

Ключевые слова: комбинированное страхование, перестрахование, вероятность неразорения, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, оптимальное управление.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 79–97.

Введение

Основа деятельности любой страховой компании заключается в получении страховой премии от страхователей и выплате страховых возмещений в случае наступления страховых случаев. В то же время довольно часто получается, что наступление одного страхового случая ведет за собой выплаты сразу по нескольким рискам. Например, такая ситуация встречается в страховании имущества – в рамках одного договора могут быть отдельно застрахованы конструктив и отделка квартиры, движимое имущество и гражданская ответственность перед третьими лицами. Страхование такого вида, покрывающее сразу несколько рисков, называется комбинированным страхованием. Рассмотрим в данной работе модель компании, заключающей договоры комбинированного страхования, которые подразумевают возможность в случае наступления страхового случая выплат сразу по нескольким (а именно, $k \geq 2$) рискам. Пусть капитал компании в момент t имеет вид

$$X_t = x + \sum_{i=1}^{k} c_i t - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{k} Y_{nj},\ t \geq 0.$$

Здесь x – это начальный капитал, c_i – интенсивность поступления страховых премий по i-ому риску, N_t – пуассоновский процесс с параметром λ, а Y_{nj} – случайные величины, обозначающие размеры требований по j-ому риску в рамках n-ого страхового случая. При этом

$$\{\overline{Y_n}\}_{n\geq 1} = \{(Y_{n1}, \ldots, Y_{nk})\}_{n\geq 1}$$

представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Компоненты данных векторов $Y_{nj},\ j = \overline{1,k}$, имеют непрерывную совместную функцию распределения $F(y_1, \ldots, y_k)$. Пусть также выполнено условие чистой прибыли: $\sum_{i=1}^{k} c_i > \lambda \sum_{j=1}^{k} EY_{nj}$.

Будем полагать, что страховая компания имеет возможность отдавать риски в перестрахование. Основной интерес для нас представляют модели, в рамках которых компания имеет возможность выбрать параметры перестрахования в каждый момент времени $t \geq 0$. Целью компании в этом случае является поиск оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей, например, вероятность неразорения. Задачи такого рода называются задачами оптимального стохастического управления. В статьях, посвященных оптимальному управлению в перестраховании, рассматривались различные виды перестрахования. Шмидли в работе [1] изучал использование квотного перестрахования, в то время как Хиппа и Вогта [2] интересовал вопрос о существовании оптимальной перестраховочной стратегии типа эксцедента убытка. В работе Громова [3] был рассмотрен договор перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. Ли и Лиу [4] обобщили работу Шмидли [1] и рассмотрели модель с двумя рисками и возможностью квотного перестрахования каждого из них. Мы в свою очередь будем предполагать, что каждый из $k \geq 2$ рисков может быть перестрахован в соответствии со своим произвольным видом перестрахования. А именно, пусть после применения перестрахования капитал компании выглядит следующим образом:

$$X_t^{\overline{d}} = x + \int_0^t \sum_{i=1}^{k} c_i(d_s^i) ds - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{k} \rho_j(Y_{nj}, d_{T_n-}^j),\ t \geq 0.$$

В каждый момент времени $t \geq 0$ компания имеет возможность выбрать параметры d_t^i перестрахования i-ого риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\overline{d}}$. Таким образом, процесс $\overline{d}_t = (d_t^1, \ldots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\overline{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Множества возможных значений параметров перестрахования d_t^i обозначим через D_i, при этом будем ограничиваться рассмотрением только компактных множеств D_i. Соответственно, в каждый фиксированный момент времени $\overline{d}_t \in D$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_k$. Пусть также $\mathfrak{D}$ – это множество всех возможных стратегий перестрахования $\overline{d}_t$.

Поступившие требования Y_{nj} по каждому из рисков в рамках одного страхового случая делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом перестрахования (функцией ρ_j) и в соответствии с выбранными параметрами перестрахования $d^j_{T_n-}$. С помощью T_n мы обозначаем моменты поступления совокупных исков. Функции ρ_j определяют сами правила, по которым производятся деления требований. Если по j-ому риску поступило требование Y_j и на момент поступления данного требования выбран параметр $d^j \in D_j$, то $\rho_j(Y_j, d^j)$ обозначает часть иска, которую должен покрыть страховщик. Перестраховщик тогда должен будет покрыть $Y_j - \rho_j(Y_j, d^j)$. При этом функции $\rho_j(y_j, d^j)$ предполагаются неубывающими по y_j и непрерывными по y_j и d^j. Кроме того, верны неравенства $0 \leq \rho_j(y_j, d^j) \leq y_j$ для любого $y_j \geq 0$.

В соответствии с типом перестрахования делятся не только требования, но и премии. После применения перестрахования интенсивности поступления премий страховщику по каждому из k рисков меняются с c_i на $c_i(d^i_t)$. Все функции $c_i(d^i)$ являются непрерывными по переменным d^i и $c_i(d^i) \leq c_i$. Мы также предполагаем, что если страховщик выбирает полное перестрахование риска, то интенсивность поступления премии по этому риску становится отрицательной (чтобы не было возможности заработать безрисковую прибыль).

Для наглядности рассмотрим примеры двух основных типов перестрахования. Если к j-ому риску применено квотное перестрахование с параметром d^j, тогда $D_j = [0, 1]$, $\rho_j(y_j, d^j) = d^j y_j$. Если же используется перестрахование эксцедента убытка, тогда $D_j = [0, \infty]$ и $\rho_j(y_j, d^j) = \min(y_j, d^j)$. Вид функций $c_j(d^j)$ зависит от выбранного принципа подсчета премии.

Основная задача страховой компании состоит в том, чтобы выбрать наилучшую стратегию перестрахования, позволяющую максимально уменьшить вероятность разорения (или, что то же самое, увеличить вероятность неразорения). Пусть $\tau^{\overline{d}} = \inf[t \geq 0 : X^{\overline{d}}_t < 0]$ – момент разорения компании. Тогда $\psi^{\overline{d}}(x) = P(\tau^{\overline{d}} < \infty | X^{\overline{d}}_0 = x)$ – вероятность разорения, в то время как $\delta^{\overline{d}}(x) = 1 - \psi^{\overline{d}}(x)$ – вероятность неразорения страховой компании, использующей стратегию перестрахования $\overline{d}_t$. Предполагаем, что $\delta^{\overline{d}}(x) = 0$ при $x < 0$. Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы определить $\delta(x) = \sup_{\overline{d}_t \in \mathfrak{D}} \delta^{\overline{d}}(x)$ и найти оптимальную стратегию перестрахования, если такая существует.

1. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана

Получим уравнение для искомой функции $\delta(x)$. Пусть $h > 0$ – малый отрезок времени, $\overline{d} \in D$ – произвольный набор параметров перестрахования, $\varepsilon > 0$ – некоторое число. В момент времени $t = 0$ мы имеем капитал x. Если $x = 0$, то будем предполагать, что $\sum_{i=1}^k c_i(d^i) \geq 0$, чтобы предотвратить ситуацию, когда разорение наступает немедленно из-за выплаты премий. Аналогично если $x > 0$, будем считать, что h настолько мало, что $x + \sum_{i=1}^k c_i(d^i)h > 0$. Рассмотрим тогда следующую стратегию перестрахования (для удобства обозначим ее $\overline{r}_t$):

$$\overline{r}_t = \begin{cases} \overline{d} \ \text{ при } t \leq \min(T_1, h), \\ \overline{d}^{\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)} \ \text{ при } t > \min(T_1, h). \end{cases}$$

Таким образом, на первом промежутке длиной не более чем h мы выбираем фиксированные произвольные параметры $\overline{d}$, а далее выбираем стратегию

$$\overline{d}^{\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)} = (d^{1\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)}, \ldots, d^{k\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)}),$$

такую, что $\delta^{\overline{d}^{\varepsilon}}(x) > \delta(x) - \varepsilon$. Данная стратегия будет существовать по определению супремума. Заметим, что мы не можем сразу выбрать оптимальную стратегию на промежутке $(\min(T_1, h),\ \infty)$, так как не знаем точно, существует она или нет.

Далее воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\delta(x) \geq \delta^{\overline{r}}(x) = e^{-\lambda h}\ \delta^{\overline{d}^{\varepsilon}}(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta^{\overline{d}^{\varepsilon}}(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt \geq$$
$$\geq e^{-\lambda h}\ \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt - \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, мы можем далее положить $\varepsilon = 0$. Таким образом, после перегруппировки слагаемых мы имеем:

$$\delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) - \delta(x) - (1 - e^{-\lambda h})\ \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt \leq 0.$$

Поделим теперь обе части на h и устремим h к 0:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)\delta'(x) - \lambda\delta(x) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k) \leq 0.$$

Получившееся неравенство справедливо для всех $\overline{d} \in D$. В связи с этим рассмотрим следующее уравнение (уравнение типа Гамильтона – Якоби – Беллмана):

$$\sup_{\overline{d} \in D} \Big[\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)g'(x) - \lambda g(x) +$$
$$+ \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k) \Big] = 0. \quad (1)$$

Здесь мы ввели новое обозначение $g(x)$, так как мы не знаем точно, удовлетворяет ли функция $\delta(x)$ данному уравнению (1) или нет. Нам только предстоит изучить вопрос о существовании и единственности решения уравнения (1) и его связи с $\delta(x)$. Однако, забегая вперед, мы можем отметить, что в соответствии со свойствами функции $\delta(x)$ нас будет интересовать существование возрастающих решений $g(x)$ уравнения (1), таких, что $g(0) > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь и далее, говоря о характеристиках функции $g(x)$, таких как, например, монотонность, мы будем иметь в виду характеристики данной функции на луче $[0,\infty)$ (определение $g(x)$ на $(-\infty,0)$ необходимо нам только для удобства записи интегралов). Заметим также, что так как для каждого фиксированного значения $x \geq 0$ мы ищем супремум непрерывной по переменным $d^j \in D_j$ функции, а множества D_j являются компактами, то данный супремум при каждом $x \geq 0$ будет достигаться (в некоторой точке $\overline{d}^*(x) = (d^{*1}(x),\ldots,d^{*k}(x))$). Более того, при нахождении супремума мы можем сузить область D до $\widetilde{D} = \{\overline{d} \in D : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) > 0\}$. Действительно, допустим, $g(x)$ – возрастающее решение уравнения (1) и супремум в данном уравнении достигается в точке $\overline{d}^*(x)$. Отсюда мы получаем, что

$$\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x))g'(x) =$$
$$= \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left[g(x) - g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^{*j}(x))) \right] dF(y_1,\ldots,y_k) \geq 0. \quad (2)$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) \geq 0$, так как мы предположили, что $g'(x) > 0$. Но выполнение неравенства $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) \geq 0$ означает, что в соответствии со стратегией $\overline{d}^*(x)$ страховая компания не отдает полностью требование (т.е. все риски) в перестрахование, так как в случае полного перестрахования мы условились, что интенсивность поступления премий должна стать отрицательной. А значит, $P\left(\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x)) > 0\right) > 0$ и в силу (2) мы получаем, что $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x))g'(x) > 0$ и тогда $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) > 0$. Таким образом, мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$\sup_{\overline{d}\in\widetilde{D}} \Bigg[\sum_{i=1}^k c_i(d^i)g'(x) - \lambda g(x) +$$
$$+ \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1,\ldots,y_k) \Bigg] = 0. \quad (3)$$

В предположении, что $g(x)$ – возрастающая функция, уравнение (3) можно также привести к другому эквивалентному виду. А именно, поделим обе части (3) на $\sum_{i=1}^k c_i(d^i)$ и воспользуемся тем, что $-\sup[-f(x)] = \inf[f(x)]$. Получим:

$$g'(x) = \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}} \Bigg[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)} \Bigg(g(x) -$$
$$- \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1,\ldots,y_k) \Bigg) \Bigg]. \quad (4)$$

Из-за того, что уравнения (3) и (4) определяют функцию $g(x)$ с точностью до умножения на константу, нам необходимо выбрать граничное условие. Пусть, например, $g(0) = 1$.

2. Существование и единственность решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана

Перейдем теперь к вопросу существования и единственности решения уравнения (4).

Теорема 1. *Существует единственное решение уравнения* (4), *такое, что* $g(0) = 1$. *Данное решение является возрастающим, ограниченным и непрерывно дифференцируемым.*

Доказательство. Сначала сразу покажем, что если существует решение $g(x)$ уравнения (4), то оно является непрерывно дифференцируемой функцией. Для этого воспользуемся равенством

$$g(x) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \dots, y_k) =$$
$$= g(x) - \int_0^x g(x-y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y).$$

Здесь и далее функция $F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x)$ обозначает функцию распределения случайной величины $\eta = \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)$. Рассмотрим разность $g'(x_1) - g'(x_2)$ для некоторых точек $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$:

$$g'(x_1) - g'(x_2) \leq \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_2))} \left(g(x_1) - \int_0^{x_1} g(x_1 - y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_2))}(y) \right) -$$
$$- \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_2))} \left(g(x_2) - \int_0^{x_2} g(x_2 - y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_2))}(y) \right) =$$
$$= \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_2))} \Big(g(x_1) - g(x_2) +$$
$$+ E\Big[g(x_2 - \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_2))) \Big] - E\Big[g(x_1 - \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_2))) \Big] \Big). \quad (5)$$

Тогда

$$|g'(x_1) - g'(x_2)| \leq \max_{p=1,2} \left(\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_p))} \Big(|g(x_1) - g(x_2)| + \right.$$
$$\left. + \left| E\Big[g(x_1 - \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_p))) \Big] - E\Big[g(x_2 - \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_p))) \Big] \right| \Big) \right). \quad (6)$$

Из данных оценок следует непрерывность функции $g'(x)$. Значит, мы можем далее произвести интегрирование по частям:

$$g(x) - \int_0^x g(x-y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y) =$$
$$= 1 + \int_0^x g'(z)dz - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) - \int_0^x F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y) g'(x-y)dy =$$
$$= 1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \int_0^x g'(z) \left(1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z)\right) dz.$$

Таким образом, уравнение (4) примет вид

$$g'(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_0^x g'(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z) \right) dz \right) \right]. \quad (7)$$

Докажем сначала существование решения уравнения (7). Пусть A – это оператор, такой, что

$$Af(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_0^x f(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z) \right) dz \right) \right]. \quad (8)$$

Зададим последовательность функций $f_n(x),\ n \geq 0$, следующим образом. Пусть

$$f_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^k c_i\ \delta_0'(x)}{\sum_{i=1}^k c_i - \lambda \sum_{j=1}^k EY_j} = \frac{\delta_0'(x)}{\delta_0(0)},$$

где $\delta_0(x)$ – это вероятность неразорения в случае отсутствия какого-либо перестрахования. Значение $\delta_0(0)$ приведено в работе Шмидли [5]. Далее определим $f_n(x) = Af_{n-1}(x)$. Отметим, что $f_n(x) \geq 0$. Кроме того, с помощью метода математической индукции докажем, что $f_n(x) \leq f_{n-1}(x), \forall n \geq 1, \forall x \geq 0$.

База индукции. Покажем сначала, что $f_1(x) \leq f_0(x)$. Согласно работе Шмидли [5], функция $\delta_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta_0'(x) = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i} \left(\delta_0(x) - \int_0^x \delta_0(x-y) dF_{\sum_{j=1}^k Y_j}(y) \right).$$

А значит, после интегрирования по частям и замены переменной мы можем получить для $\delta_0(x)$ эквивалентное уравнение вида

$$\delta_0'(x) = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i} \left(\left[1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x) \right] \delta_0(0) + \int_0^x \delta_0'(z) \left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x-z) \right) dz \right).$$

Тогда

$$f_1(x) \le \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i}\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x) + \int_0^x f_0(z)\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x-z)\right)dz\right) = f_0(x).$$

Шаг индукции. Допустим, что мы уже доказали, что $f_{n-1}(x) \ge f_n(x)$ для некоторого n. Покажем тогда, что $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$. Пусть инфимумы функций $f_n(x) = Af_{n-1}(x)$ достигаются соответственно в точках $\overline{d}^*_{n-1}(x)$. Имеем:

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = Af_{n-1}(x) - Af_n(x) \ge$$
$$\ge \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d^{*i}_{n-1}(x))}\int\limits_0^x (f_{n-1}(z) - f_n(z))\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}_{n-1}(x))}(x-z)\right)dz \ge 0.$$

Таким образом, $f_n(x)$ – это невозрастающая по n последовательность функций, ограниченная снизу 0. Следовательно, при каждом фиксированном значении $x \ge 0$ существует предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Пусть $\overline{d}^*_\infty(x)$ – это точка, в которой достигается инфимум функции $Af(x)$. Докажем, что справедливо равенство $Af(x) = f(x)$. С одной стороны,

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) \le \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d^{*i}_\infty(x))}\Bigg(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}_\infty(x))}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^x f_{n-1}(z)\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}_\infty(x))}(x-z)\right)dz\Bigg).$$

Отсюда, после перехода к пределу при $n \to \infty$, мы получим $f(x) \le Af(x)$. С другой стороны, поскольку $f(x) \le f_{n-1}(x)$,

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) \ge \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d^{*i}_\infty(x))}\Bigg(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}_\infty(x))}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^x f(z)\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}_\infty(x))}(x-z)\right)dz\Bigg) = Af(x).$$

Следовательно, $f(x) \ge Af(x)$, а значит, в силу предыдущих рассуждений, верно равенство $Af(x) = f(x)$. Преобразовав данное соотношение с помощью интегрирования по частям и с помощью оценок, аналогичных (5) и (6), приходим к выводу, что функция $f(x)$ непрерывна. Рассмотрим $g(x) = 1 + \int_0^x f(z)dz$. Несложно проверить, что функция $g(x)$ будет являться решением уравнения (7).

Изучим свойства функции $g(x)$. Из того, как мы определили $g(x)$ через $f(x)$, сразу следует, что $g(0) = 1$ и что $g(x)$ является неубывающей (подынтегральная функция $f(x) \ge 0$). Мы уже показали ранее, что $g(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Более того, $g(x)$ является ограниченной сверху:

$$g(x) = 1 + \int_0^x f(z)dz \le 1 + \int_0^x \frac{\delta_0'(z)}{\delta_0(0)}dz = 1 + \frac{\delta_0(x) - \delta_0(0)}{\delta_0(0)} \le 1 + \frac{1 - \delta_0(0)}{\delta_0(0)} = \frac{1}{\delta_0(0)}.$$

Покажем теперь, что $g(x)$ – строго возрастающая функция. Допустим, что это не так. Мы уже знаем, что $g'(x) \geq 0$. Из (7) следует, что $g'(0) > 0$. Пусть тогда $x_0 = \inf[z : g'(z) = 0]$. В силу того, что функция $g(x)$ является решением уравнения (4), получаем

$$g'(x_0) = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^{*i}(x_0))} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Bigg(g(x_0) - \\ - g(x_0 - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^{*j}(x_0))) \Bigg) dF(y_1, \dots, y_k) = 0.$$

Чтобы интеграл такого вида был равен нулю, необходимо, чтобы $\sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^{*j}(x_0)) = 0$ во всех точках y_j возрастания функции $F(y_1, \dots, y_k)$, но это будет означать, что страховая компания передала в перестрахование полностью все риски и тогда $\overline{d}^*(x_0) \notin \widetilde{D}$. Мы пришли к противоречию, значит, $g(x)$ – строго возрастающая функция.

Таким образом, мы доказали существование решения уравнения (4) и описали все основные свойства данного решения. Докажем далее единственность решения уравнения (4) (также через единственность решения уравнения (7)). Предположим, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – два решения уравнения (7), такие, что $g_1(0) = g_2(0) = 1$. Пусть $f_j(x) = g'_j(x)$ и пусть теперь $\overline{d}^*_j(x)$ – это точки, в которых достигаются инфимумы в уравнениях для функций $f_j(x)$ соответственно, $j = 1, 2$. Зафиксируем точку $\widetilde{x} > 0$. Поскольку правая часть уравнения (7) непрерывна по переменным $d_1, \dots, d_k$ и стремится к бесконечности при $\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) \to 0$, то функции $\sum_{i=1}^{k} c_i(d_1^{*i}(x))$ и $\sum_{i=1}^{k} c_i(d_2^{*i}(x))$ отделены от 0 на отрезке $[0, \widetilde{x}]$. Пусть тогда

$$x_1 = \inf_{0 \leq x \leq \widetilde{x}} \left[\min \left(\sum_{i=1}^{k} c_i(d_1^{*i}(x)), \sum_{i=1}^{k} c_i(d_2^{*i}(x)) \right) \right] / (2\lambda)$$

и $x_n = \min(nx_1, \widetilde{x})$. Без ограничения общности будем считать, что $x_1 \leq \widetilde{x}$. С помощью метода математической индукции покажем, что для $\forall n \geq 0$ функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ совпадают на отрезке $[0, x_n]$. Базой индукции является случай $n = 0$, который очевиден. Далее допустим, что мы доказали, что $g_1(x) = g_2(x)$ на отрезке $[0, x_n]$ для некоторого n. Теперь докажем, что $g_1(x) = g_2(x)$ на $[x_n, x_{n+1}]$. Пусть $m = \sup_{x_n \leq x \leq x_{n+1}} |f_1(x) - f_2(x)|$. Тогда для всех $x \in [x_n, x_{n+1}]$

$$f_1(x) - f_2(x) \leq \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_2^{*i}(x))} \int\limits_{x_n}^{x} (f_1(z) - f_2(z)) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_2^{*j}(x))}(x - z) \right) dz \leq \\ \leq \frac{\lambda m(x - x_n)}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_2^{*i}(x))} \leq \frac{\lambda m x_1}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_2^{*i}(x))} \leq \frac{m}{2}.$$

Аналогично получаем, что $f_2(x) - f_1(x) \leq \frac{m}{2}$, а значит, $|f_1(x) - f_2(x)| \leq \frac{m}{2}$. Такое возможно только при $m = 0$. Отсюда следует, что при всех $x \in [x_n, x_{n+1}]$ справедливы равенства $f_1(x) = f_2(x)$ и $g_1(x) = g_2(x)$. Таким образом, мы доказали, что $g_1(x) = g_2(x)$ на всех отрезках вида $[0, x_n]$. Следовательно, $g_1(x) = g_2(x)$ на $[0, \widetilde{x}]$, а поскольку мы выбирали $\widetilde{x}$ произвольным образом, мы получаем, что функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ полностью совпадают при всех $x \geq 0$ и решение уравнения (7) единственно. $\square$

3. Связь решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана и вероятности неразорения

Прежде чем перейти к теореме, устанавливающей связь между решением уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана и вероятностью неразорения $\delta(x)$, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Процесс*

$$g(X_t^{\overline{d}}) - \int_0^t \Bigg[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) + \\ + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) \Bigg] ds$$

является мартингалом.

Доказательство. Справедливость данного факта будет следовать из теоремы 2.2 книги Рольски и соавторов [6] (стр. 447). Введем несколько используемых в данной теореме определений. Пусть E – некоторое множество. Многозначным линейным оператором будем называть набор функций $\mathbf{G} \subset \{(p, \widetilde{p}) : p, \widetilde{p} \in M(E)\}$, такой, что из $(p_i, \widetilde{p}_i) \in \mathbf{G},\ i \in \{1, 2\}$, следует, что $(ap_1 + bp_2, a\widetilde{p}_1 + b\widetilde{p}_2) \in \mathbf{G}$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$. Множество $M(E)$ состоит из всех вещественнозначных измеримых функций на E. Областью определения оператора $\mathbf{G}$ назовем

$$\mathcal{D}(\mathbf{G}) = \{p \in M(E) : (p, \widetilde{p}) \in \mathbf{G} \text{ для некоторой } \widetilde{p} \in M(E)\}.$$

Пусть далее есть некоторый марковский процесс Y_t, принимающий значения из E. Тогда многозначный оператор $\mathbf{G}$, состоящий из всех пар $(p, \widetilde{p}) \in M(E) \times M(E)$, таких, что процесс

$$\{p(Y_t) - p(Y_0) - \int_0^t \widetilde{p}(Y_s) ds,\ t \geq 0\}$$

является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \geq 0}$, называется полным генератором марковского процесса Y_t. Таким образом, если мы знаем некоторую функцию p, которая принадлежит области определения полного генератора марковского процесса, то мы можем построить мартингал, связанный с данным марковским процессом. Пусть далее $\mathbf{G}p$ обозначает функцию $\widetilde{p}$ (возможно, одну из многих), такую, что $(p, \widetilde{p}) \in \mathbf{G}$.

Несложно проверить, что процесс $X_t^{\overline{d}}$ является кусочно-детерминированным марковским процессом. При этом можно руководствоваться определением кусочно - детерминированного марковского процесса, приведенным в книге [6]. Авторы [6] отдельно рассматривают поведение процесса между скачками и сам механизм появления скачков. Механизм появления скачков определяется в [6] интенсивностью скачков (в нашем случае она постоянна и равна λ) и функцией перехода $Q : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$, где $Q(x,\cdot)$ обозначает распределение капитала сразу после скачка, если непосредственно перед скачком капитал был на уровне $x \in E$. Между скачками кусочно - детерминированный марковский процесс, выходящий из некоторой точки $z \in E$ в момент времени $t = 0$, определяется неслучайной функцией $\varphi(t,z)$, такой, что $\varphi(0,z) = z$. В нашем случае область значений процесса E совпадает с $\mathbb{R}$ и функция $\varphi(t,z)$ задается уравнением $\varphi(t,z) = z + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d^i(\varphi(s,z)))ds$. Также в [6] упоминается оператор $\mathbf{X}$, который, в случае если некоторая функция p является непрерывно дифференцируемой, удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}p(\varphi(t,z)) = (\mathbf{X}p)(\varphi(t,z)).$$

Применительно к процессу $X_t^{\overline{d}}$, мы получаем

$$(\mathbf{X}p)(\varphi(t,z)) = \frac{d}{dt}p(z + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d^i(\varphi(s,z)))ds) = \sum_{i=1}^k c_i(d^i(\varphi(t,z)))p'(\varphi(t,z)).$$

Нашей целью является найти мартингал, связанный с $X_t^{\overline{d}}$. Процесс $X_t^{\overline{d}}$ и функция g, являющаяся единственным решением уравнения (4), удовлетворяют всем условиям теоремы 2.2 книги [6], из которой следует, что функция g лежит в $\mathcal{D}(\mathbf{G})$, где $\mathbf{G}$ – это полный генератор марковского процесса $X_t^{\overline{d}}$. При этом $\mathbf{G}g$ имеет вид

$$(\mathbf{G}g)(x) = (\mathbf{X}g)(x) + \lambda \int_E (g(y) - g(x))Q(x,dy).$$

Значит, мы можем сделать вывод, что процесс

$$\{g(X_t^{\overline{d}}) - g(X_0^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[(\mathbf{X}g)(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_E (g(y) - g(X_s^{\overline{d}}))Q(X_s^{\overline{d}},dy)\right] ds,\ t \geq 0\}$$

является мартингалом. Но в то же время справедливо равенство

$$\begin{aligned} g(X_t^{\overline{d}}) - g(X_0^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[(\mathbf{X}g)(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_E (g(y) - g(X_s^{\overline{d}}))Q(X_s^{\overline{d}},dy)\right] ds = \\ = g(X_t^{\overline{d}}) - g(x) - \int_0^t \Bigg[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)g'(X_s^{\overline{d}}) + \\ + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j))dF(y_1,\ldots,y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}})\Bigg] ds, \end{aligned}$$

из которого мы получаем то, что требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть $\overline{d}_t$ – произвольная стратегия перестрахования. Тогда с вероятностью, равной 1, либо происходит разорение компании, либо $X_t^{\overline{d}} \to \infty$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $c_i^0 < 0$ – это интенсивность поступления премий по i-ому риску в случае, если данный риск полностью отдан в перестрахование. Рассмотрим множество параметров перестрахования $B = \{\overline{d} : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) \geq \sum_{i=1}^k c_i^0/2\}$, через $\overline{B}$ обозначим дополнение данного множества. Выберем далее произвольное $0 < \varepsilon < -\sum_{i=1}^k c_i^0/2$ и положим

$$\mathfrak{q} = \frac{-\sum_{i=1}^k c_i^0 - 2\varepsilon}{2\sum_{i=1}^k c_i - \sum_{i=1}^k c_i^0}.$$

Как и ранее, c_i – это интенсивность поступления страховых премий по i-ому риску в случае отсутствия перестрахования. Зафиксируем также произвольное $a > 0$ и определим рекуррентно последовательность $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$t_1 = \inf[t \geq 0 : X_t^{\overline{d}} < a]$$

и

$$t_{m+1} = \inf[t \geq t_m + 1 : X_t^{\overline{d}} < a].$$

Пусть для некоторого $m \geq 1$ и $\omega \in \Omega$ выполнено, что $t_m(\omega) < \infty$. Пусть также Σ_m – это σ-алгебра, порожденная $\left(X_{t\wedge t_m}^{\overline{d}}\right)_{t\geq 0}$. Наша цель состоит в том, чтобы оценить математическое ожидание $E(\mathbb{I}_{t_m<\infty\ \cap\ X_{t_m+1}^{\overline{d}}\leq a-\varepsilon}|\Sigma_m)(\omega)$. Для этого рассмотрим два случая. Покажем сначала, что если для некоторого произвольного $t \geq 0$ верно, что $\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s\in B} ds \leq \mathfrak{q}$, тогда $X_{t+1}^{\overline{d}} \leq X_t^{\overline{d}} - \varepsilon$ п.н. Действительно,

$$X_{t+1}^{\overline{d}} \leq X_t^{\overline{d}} + \int_t^{t+1} \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)\mathbb{I}_{\overline{d}_s\in B} ds + \int_t^{t+1} \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)\mathbb{I}_{\overline{d}_s\in \overline{B}} ds \leq$$
$$\leq X_t^{\overline{d}} + \sum_{i=1}^k c_i \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s\in B} ds + \sum_{i=1}^k c_i^0/2 \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s\in \overline{B}} ds \leq X_t^{\overline{d}} - \varepsilon.$$

Следовательно, если для $t_m(\omega) < \infty$ справедливо условие $\int_{t_m(\omega)}^{t_m(\omega)+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s\in B} ds \leq \mathfrak{q}$, то

$$E(\mathbb{I}_{t_m<\infty\ \cap\ X_{t_m+1}^{\overline{d}}\leq a-\varepsilon}|\Sigma_m)(\omega) = 1.$$

Перейдем теперь ко второму случаю, когда для величины $t_m(\omega) < \infty$ выполнено $\int_{t_m(\omega)}^{t_m(\omega)+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s\in B} ds > \mathfrak{q}$. Имеем:

$$E(\mathbb{I}_{t_m<\infty\ \cap\ X_{t_m+1}^{\overline{d}}\leq a-\varepsilon}|\Sigma_m)(\omega) \geq P(X_{t_m+1}^{\overline{d}} \leq a-\varepsilon | X_{t_m}^{\overline{d}} = a) =$$
$$= P\Big(\sum_{T_i\in(t_m,\ t_{m+1}]} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{ij}, d_{T_i-}^j) \geq \int_{t_m}^{t_m+1} \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) ds + \varepsilon\Big) \geq$$
$$\geq P\Big(\sum_{T_i\in(t_m,\ t_{m+1}]} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{ij}, d_{T_i-}^j) \geq \sum_{i=1}^k c_i + \varepsilon\Big).$$

Отметим, что для любого $t \geq 0$, такого, что $\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s \in B} ds > \mathfrak{q}$, верно неравенство

$$P\Big(\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s \in B} dN_s \geq \Big\lceil 1 + \sum_{i=1}^k c_i/\varepsilon \Big\rceil\Big) \geq P\Big(N_{\mathfrak{q}} \geq \Big\lceil 1 + \sum_{i=1}^k c_i/\varepsilon \Big\rceil\Big).$$

Пусть далее

$$P\Big(N_{\mathfrak{q}} \geq \Big\lceil 1 + \sum_{i=1}^k c_i/\varepsilon \Big\rceil\Big) = \mathrm{r} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$P\Big(\sum_{T_i \in (t_m,\ t_{m+1}]} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{ij}, d^j_{T_i -}) \geq \sum_{i=1}^k c_i + \varepsilon\Big) \geq \mathrm{r} \cdot P\Big(\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{ij}, d^j_{T_i -}) > \varepsilon \text{ для } \Big\lceil 1 + \sum_{l=1}^k c_l/\varepsilon \Big\rceil \text{ убытков, таких, что } T_i \in (t_m,\ t_{m+1}] \text{ и } \overline{d}_{T_i} \in B\Big). \quad (9)$$

В силу того, что функции $c_i(d^i)$ и $\rho_j(y_j, d^j)$, $i, j = \overline{1, k}$, являются непрерывными, можно взять $\varepsilon > 0$ такое, что

$$P\Big(\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j) \geq \varepsilon\Big) > 0 \text{ для любых параметров перестрахования } \overline{d} \in B.$$

При этом у данной вероятности есть строго положительная нижняя грань по параметрам перестрахования $\overline{d} \in B$. А значит, существует $\delta > 0$, такое, что правая часть (9) будет не меньше δ. Для данного $\delta > 0$ и для $t_m(\omega) < \infty$, для которого выполнено $\int_{t_m(\omega)}^{t_m(\omega)+1} \mathbb{I}_{\overline{d}_s \in B} ds > \mathfrak{q}$, мы имеем

$$E(\mathbb{I}_{t_m < \infty\ \cap\ X^{\overline{d}}_{t_m+1} \leq a - \varepsilon} | \Sigma_m)(\omega) \geq \delta.$$

Таким образом, мы окончательно получаем, что для всех $m \geq 1$

$$E(\mathbb{I}_{t_m < \infty\ \cap\ X^{\overline{d}}_{t_m+1} \leq a - \varepsilon} - \delta \mathbb{I}_{t_m < \infty} | \Sigma_m) \geq 0 \text{ п.н.} \quad (10)$$

Действительно, для тех $\omega \in \Omega$, для которых $t_m(\omega) < \infty$, данное неравенство выполняется в силу рассуждений, приведенных выше. Для тех же $\omega \in \Omega$, для которых $t_m(\omega) = \infty$, обе части (10) равны 0 и неравенство также остается справедливым.

Рассмотрим теперь случайные величины

$$W_m = \mathbb{I}_{t_m < \infty\ \cap\ X^{\overline{d}}_{t_m+1} \leq a - \varepsilon}, \quad Z_m = \delta \mathbb{I}_{t_m < \infty}, \quad A_n = \sum_{m=1}^n (W_m - Z_m).$$

Заметим, что $A_1, \ldots, A_n$ являются Σ_{n+1}–измеримыми. Покажем, что в силу (10) процесс $\{A_n\}_{n \geq 1}$ является субмартингалом относительно фильтрации $\widetilde{\Sigma}_n$, такой, что $\widetilde{\Sigma}_n \equiv \Sigma_{n+1}$:

$$E(A_{n+1} | \widetilde{\Sigma}_n) = E(A_{n+1} | \Sigma_{n+1}) = A_n + E(W_{n+1} - Z_{n+1} | \Sigma_{n+1}) = \\ = A_n + E(\mathbb{I}_{t_{n+1} < \infty\ \cap\ X^{\overline{d}}_{t_{n+1}+1} \leq a - \varepsilon} - \delta \mathbb{I}_{t_{n+1} < \infty} | \Sigma_{n+1}) \geq 0.$$

Тогда из леммы 1.15, приведенной в книге Шмидли [7], стр. 22, следует, что верно равенство

$$P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty,\ \sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty\Big) = 0, \tag{11}$$

а значит,

$$P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty,\ \sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty\Big) + P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m < \infty,\ \sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty\Big) = 1.$$

Таким образом, если $\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t^{\overline{d}} < a$, то с вероятностью, равной 1, $\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t^{\overline{d}} \le a-\varepsilon$. С другой стороны, если процесс $X_t^{\overline{d}}$ опустится ниже уровня a только конечное количество раз, тогда с вероятностью 1 процесс $X_t^{\overline{d}}$ опустится ниже $a+\varepsilon/2$ тоже только конечное количество раз (иначе мы получим противоречие с (11)). В силу произвольного выбора параметра $a > 0$ мы можем сделать вывод, что с вероятностью, равной 1, либо происходит разорение компании, либо $X_t^{\overline{d}} \to \infty$ при $t \to \infty$. □

Итак, перейдем теперь к основной теореме данного раздела.

Теорема 2. *Пусть $g(x)$ – единственное решение уравнения (4), такое, что $g(0) = 1$. Тогда $g(x) = \delta(x)/\delta(0) = \delta(x)g(\infty)$, при этом оптимальная стратегия перестрахования имеет вид $\overline{d}_t^* = \overline{d}^*(X_t^{\overline{d}^*})$, где $\overline{d}^*(x)$ – это точка, в которой достигается инфимум в уравнении (4), а $X_t^{\overline{d}^*}$ – это процесс капитала страховой компании, использующей оптимальную стратегию перестрахования $\overline{d}_t^*$.*

Доказательство. Пусть $\overline{d}_t$ – произвольная стратегия перестрахования вида $\overline{d}_t = \overline{d}(X_t^{\overline{d}})$. Из леммы 1 и теоремы об остановке следует, что случайный процесс

$$g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t}) - \int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge t}\Bigg[\sum_{i=1}^{k} c_i(d_s^i)g'(X_s^{\overline{d}}) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) + \\ + \lambda\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty} g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^{k}\rho_j(y_j, d_s^j))dF(y_1,\dots,y_k)\Bigg]ds$$

является мартингалом. Тогда в силу равенства (1) мы получаем, что процесс $g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t})$ является супермартингалом. Следовательно,

$$E\left(g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t})\right) = E\left(g(X_t^{\overline{d}})\ \mathbb{I}(\tau^{\overline{d}} > t)\right) \le g(x). \tag{12}$$

Аналогично можно доказать, что процесс $g(X^{\overline{d}^*}_{\tau^{\overline{d}^*}\wedge t})$ является мартингалом, а значит,

$$E\left(g(X^{\overline{d}^*}_{\tau^{\overline{d}^*}\wedge t})\right) = E\left(g(X_t^{\overline{d}^*})\ \mathbb{I}(\tau^{\overline{d}^*} > t)\right) = g(x). \tag{13}$$

Устремим теперь t к бесконечности. В силу леммы 2 мы имеем, что $X_t^{\overline{d}} \to \infty$, если $\tau^{\overline{d}} = \infty$. Поэтому из (12) и (13) мы получаем, что $g(x) \ge g(\infty)P(\tau^{\overline{d}} = \infty) = g(\infty)\delta^{\overline{d}}(x)$, т.е. $\delta^{\overline{d}}(x) \le g(x)/g(\infty)$, и $\delta^{\overline{d}^*}(x) = g(x)/g(\infty)$.

Отсюда следует, что $\delta^{\overline{d}^*}(x) = \delta(x) = g(x)/g(\infty)$ и оптимальной стратегией является $\overline{d}^*_t$. При этом также верно равенство $\delta(0) = 1/g(\infty)$, которое получается после подстановки $x = 0$. □

4. Численные результаты

Рассмотрим частный случай описанной выше модели. Пусть договор страхования покрывает два риска. Размеры убытков по данным рискам являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами соответственно с параметрами β_1 и β_2. К первому риску применяется перестрахование эксцедента убытка, ко второму – квотное. Метод последовательных приближений, описанный в доказательстве теоремы 1, позволяет строить графики функции $\delta(x)$ и оптимальных стратегий перестрахования для фиксированных числовых значений параметров модели. Пусть параметр пуассоновского потока $\lambda = 1$, параметры распределения размеров требований $\beta_1 = 1.4$ и $\beta_2 = 1.5$. На Рис. 1. изображены график $\delta(x)$ (верхняя жирная кривая) и последовательные приближения для данной функции. На Рис. 2. и 3. приведены результаты для параметров оптимальных стратегий перестрахования (эксцедента убытка и квотного, соответственно).

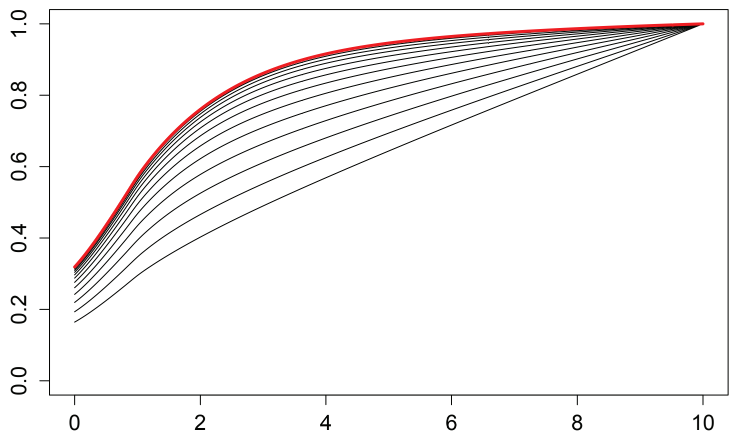

Рис. 1: Вероятность неразорения $\delta(x)$

Таким образом, мы получаем, что до тех пор, пока капитал страховой компании не превышает значения, примерно равного 1, оптимальное решение компании заключается в том, чтобы оба риска полностью оставить себе и не использовать перестрахование. Когда же капитал становится больше 1, появляется смысл применять перестрахование к обоим рискам. Более того, первый риск рекомендуется полностью отдать в перестрахование.

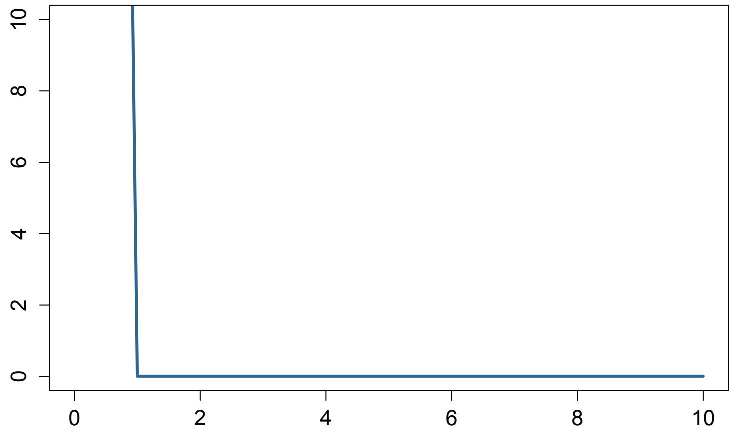

Рис. 2: Оптимальный параметр перестрахования эксцедента убытка как функция от капитала компании

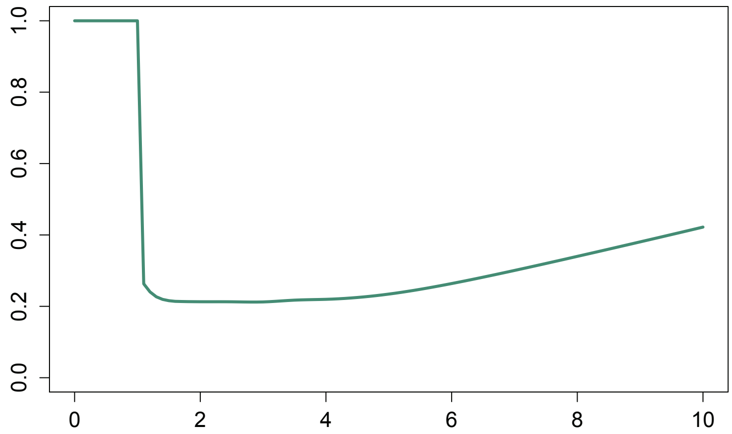

Рис. 3: Оптимальный параметр квотного перестрахования как функция от капитала компании

Заключение

В работе рассмотрена задача выбора оптимального (в смысле максимизации вероятности неразорения) перестрахования для компании, заключающей дого-

воры комбинированного страхования. Получено уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана и доказано, что оно имеет единственное возрастающее, ограниченное и непрерывно дифференцируемое решение с указанным граничным условием. Установлена связь между данным решением и искомой максимальной вероятностью неразорения. Определен вид оптимальной стратегии перестрахования и приведены численные результаты для случая двух экспоненциально распределенных рисков.

Список литературы

[1] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting // Scandinavian Actuarial Journal. 2001. № 1. Pp. 55–68.

[2] Hipp C., Vogt M. Optimal dynamic XL reinsurance // ASTIN Bulletin. 2003. № 33. Pp. 193–207.

[3] Громов А.Н. Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 4. С. 17–22.

[4] Li Y., Liu G. Dynamic proportional reinsurance and approximations for ruin probabilities in the two-dimensional compound Poisson risk model // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2012. Pp. 1–26.

[5] Schmidli H. Lecture Notes on Risk Theory. Cologne: Institute of Mathematics, University of Cologne, 2000. 216 p.

[6] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.L. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Chichester: Wiley, 1999. 680 p.

[7] Schmidli H. Stochastic Control in Insurance. London: Springer-Verlag, 2008. 258 p.

Библиографическая ссылка

Муромская А.А. Оптимальное перестрахование в модели со страхованием нескольких рисков в рамках одного договора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 79–97.

Сведения об авторах

1. **Муромская Анастасия Андреевна**
аспирант кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: aa-muromskaya@yandex.ru.

OPTIMAL REINSURANCE IN THE MODEL WITH SEVERAL RISKS WITHIN ONE INSURANCE POLICY

Muromskaya Anastasia Andreevna
PhD student at the Probability Theory department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, Leninskie gory, Lomonosov MSU.
E-mail: aa-muromskaya@yandex.ru

Received 10.11.2016, revised 05.12.2016.

We study the model of insurance company performance that issues insurance policies covering several risks. Each risk can be reinsured according to the arbitrary reinsurance treaty. Parameters of such reinsurance treaties can be changed dynamically. The main aim is to find an optimal reinsurance strategy that maximises the probability of survival of the insurance company. The Hamilton–Jacobi–Bellman equation for this problem is deduced and existence and uniqueness of its solution are proved. We also establish the optimal reinsurance strategy and give numerical results for the special case of claim distribution.

Keywords: multiple peril insurance, reinsurance, survival probability, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, optimal control.

Bibliographic citation

Muromskaya A.A. Optimal reinsurance in the model with several risks within one insurance policy. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 4, pp. 79–97. (in Russian)

References

[1] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001, no. 1, pp. 55–68.

[2] Hipp C., Vogt M. Optimal dynamic XL reinsurance. *ASTIN Bulletin*, 2003, no. 33, pp. 193–207.

[3] Gromov A.N. Optimal XL reinsurance strategies. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2011, vol. 66, no. 4, pp. 153–157.

[4] Li Y., Liu G. Dynamic proportional reinsurance and approximations for ruin probabilities in the two-dimensional compound Poisson risk model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012, pp. 1–26.

[5] Schmidli H. *Lecture Notes on Risk Theory*. Cologne, Institute of Mathematics, University of Cologne, 2000. 216 p.

[6] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.L. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Chichester, Wiley, 1999. 680 p.

[7] Schmidli H. *Stochastic Control in Insurance*. London, Springer-Verlag, 2008. 258 p.