МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 19.87:621.5

ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВИХРЕВОМ АКСИАЛЬНОМ ТЕПЛОГЕНЕРАТОРЕ

Климок В.И.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 08.10.2016, после переработки 21.10.2016.

Математическая модель аксиального теплогенератора основана на уравнениях Навье-Стокса, записанных в цилиндрической системе координат в предположении осевой симметрии. Результаты численных экспериментов по расчету полей течений пассивного аксиального теплогенератора указывают на существенную неравномерность изменения гидродинамических характеристик течения, осредненных по поперечному сечению.

Ключевые слова: численный эксперимент, интегральные характеристики, вихревой теплогенератор, пассивный аксиальный.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 35–44.

Введение

Как известно из экспериментальных исследований вихревые теплогенераторы имеют высокий коэффициент полезного действия. Они предназначены для получения горячей воды путем преобразования энергии закрученного потока жидкости в тепло и представляют большой интерес для народного хозяйства как альтернативный экологически чистый источник тепловой энергии. Обзор патентов и систематизация конструкций гидродинамических теплогенераторов имеются, например, в [1]. Кроме экспериментальных испытаний конкретных установок весьма интересны и чисто теоретические исследования, касающиеся гидродинамики и внутреннего тепловыделения закрученных потоков жидкости.

Результаты исследований гидротермодинамического режима вихревого пассивного *тангенциального* теплогенератора изложены в работах [2], [3] и [4]. В статье [5] обсуждаются результаты математического моделирования полей течений в пассивном *аксиальном* теплогенераторе. К пассивным, по классификации [1], отнесены теплогенераторы статического типа, не содержащие подвижных частей в устройстве, где формируется поток жидкости. Данная работа является естественным продолжением исследований, изложенных в [5].

1. Постановка задачи

Аксиальный теплогенератор представляет трубу со сложной внутренней конфигурацией, способствующей генерации тороидальных вихрей [5]. В связи с этим математическая модель основана на уравнениях гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости, записанных в цилиндрической ортогональной системе координат r, ϑ, x [6] в приближении осевой симметрии (т.е. все функции не зависят от угла ϑ). Кроме того предполагаем, что течение не закручено вокруг оси трубы как в тангенциальном теплогенераторе, т. е. считаем равной нулю окружную (азимутальную) составляющую скорости, характеризующую закрутку течения в трубе.

После исключения составляющих градиента давления из уравнений для осевой u и радиальной v составляющих скорости придем к системе уравнений [5] относительно функций $\tilde{\xi}\,(x, r, t)$ и $\psi\,(x, r)$

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \nu\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial x^2}\right], \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \tilde{\xi} r, \qquad (2)$$

с учетом обозначения $\tilde{\xi} = \xi / r$. Здесь $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}$ – азимутальная компонента завихренности, ν – кинематический коэффициент вязкости, а компоненты скорости u и v связаны с функцией тока $\psi\,(x, r)$ соотношениями

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (3)$$

Итак, для расчета полей течений аксиального вихревого теплогенератора использовались уравнения (1), (2) и соотношения (3).

Давление жидкости $P\,(x, r)$ внутри теплогенератора находилось из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) = -2\rho r\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x}\right], \qquad (4)$$

которое получено комбинацией уравнений для осевой и радиальной составляющих скорости с уравнением неразрывности.

2. Результаты расчета полей течений аксиального вихревого теплогенератора

При конечно-разностной аппроксимации уравнения для функции $\tilde{\xi}$ использовалась схема «естественного фильтра» по времени и монотонная консервативно-диссипативная схема второго порядка точности по пространственным переменным. Значения рассчитываемых величин определялись в узлах «сдвинутой» разностной сетки. Задание граничных условий, начального приближения и порядок вычислений подробно описаны в [5]. Там же имеется и вид пространственной сетки, в узлах которой находились искомые неизвестные.

Так как течение предполагается осесимметричным, то достаточно представить результаты в какой-либо меридиональной плоскости (проходящей через ось симметрии x) и рассматривать не всю конфигурацию сечения теплогенератора этой плоскостью, а ее половину, ограниченную осью симметрии и стенкой. Значения входных параметров следующие: расход $Q = 8 \cdot 10^{-3}$м^3/с, радиус трубы во входном сечении $R = 0,024$м, кинематический коэффициент вязкости $\nu = 10^{-5}$м^2/с, шаг по времени $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$с, длина трубы $L = 0,243$м, давление на входе в теплогенератор $P_0 = 350$кПа, шаги по пространственным координатам $h_x = h_r = 1,5 \cdot 10^{-3}$м.

Интегрирование уравнений, описывающих гидродинамический режим вихревого генератора, было выполнено на полторы секунды модельного времени. За это время в теплогенераторе устанавливается квазистационарный режим течения, что хорошо видно из Рис. 1 и 2.

Рис. 1 иллюстрирует изменение по времени средней по объему кинетической энергии $K(t) = \frac{\int\limits_0^L dx \int\limits_0^{R(x)} \left(u^2+v^2\right) r\, dr}{\int\limits_0^L R^2(x) dx}$ (м^2/с^2) жидкости, находящейся в теплогенераторе, где $R(x)$ – функция, описывающая изменение внутреннего радиуса.

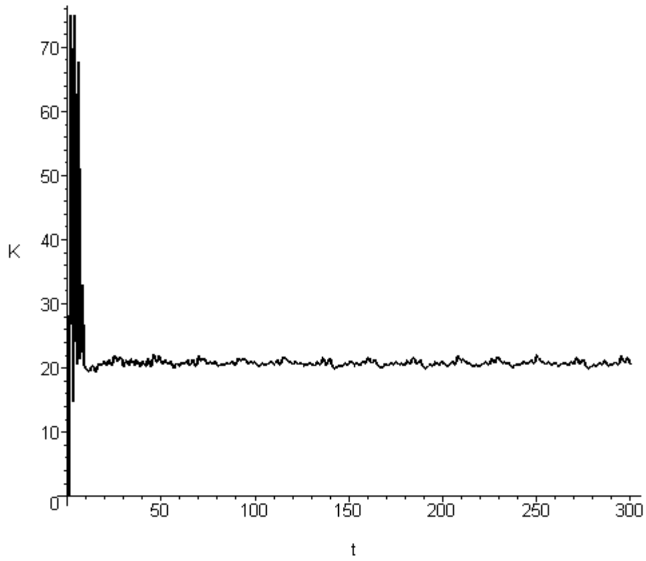

Рис. 1: Изменение кинетической энергии со временем

На Рис. 2 приведено изменение со временем минимального значения функции тока $\min\limits_{x,r} \psi(x, r, t)$ (м^3/с).

В связи с тем, что протекающий процесс нестационарен все значения гидродинамических характеристик, получаемые во время расчета, усреднялись по времени соответствующему интегрированию уравнений на 300 шагов.

Из Рис. 3 нетрудно представить конструкцию аксиального теплогенератора. В данном случае он имеет семь резко сужающихся и шесть резко расширяющихся участков сечения цилиндра, последние в дальнейшем будем называть впадинами.

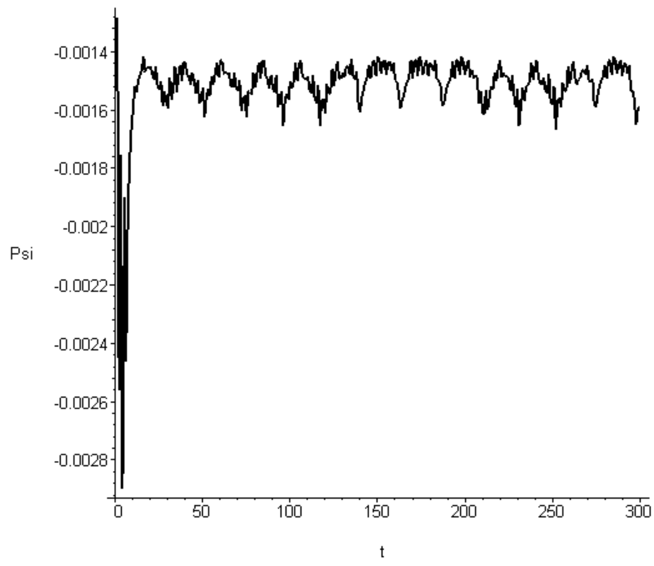

Рис. 2: Изменение наименьшего значения функции тока со временем

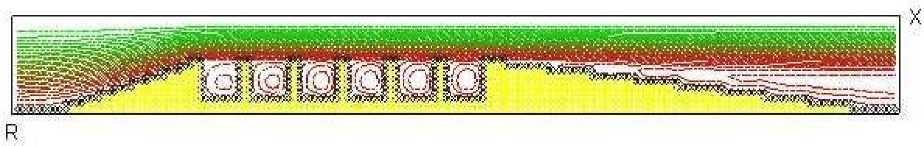

Рис. 3: Изолинии функции тока ψ

До первого препятствия внутренний радиус цилиндра постепенно уменьшается, а после последнего – постепенно увеличивается, то есть имеются конфузор и диффузор.

Изолинии функции тока (Рис. 3), характеризующие поле течений, указывают на появление между препятствиями вихрей примерно одинаковой интенсивности, вращающихся по направлению часовой стрелки. В окрестности стенки диффузора осуществляется подток жидкости из емкости, в которую подается вода из теплогенератора. Заметим, что и в тангенциальном теплогенераторе происходит подсос жидкости из емкости, в которую она попадает из теплогенератора, но только в окрестности его оси [3], [4].

На Рис. 4 приведен график изменения вдоль оси радиальной составляющей скорости $V(x) = \frac{2}{R^2(x)} \int\limits_0^{R(x)} v\,r\,dr$, усредненной по сечению перпендикулярному оси трубы. Обращает на себя внимание тот факт, что увеличение радиальной составляющей скорости в диффузоре перед первым препятствием и уменьшение ее в конфузоре после последнего препятствия происходит неравномерно.

При отсутствии диффузора и конфузора график функции $V(x)$ на указанных участках теплогенератора представляет собой гладкую кривую. Средняя в поперечном сечении радиальная составляющая скорости направлена к оси цилиндра до первого препятствия и от нее после последнего. Над препятствиями поведение функции $V(x)$ вполне аналогично поведению, приведенному на Рис. 4.

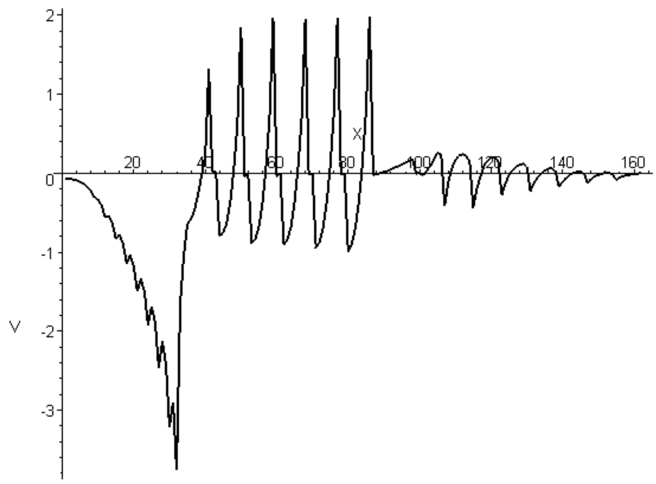

Рис. 4: Радиальная составляющая вектора скорости, осредненная по поперечному сечению трубы

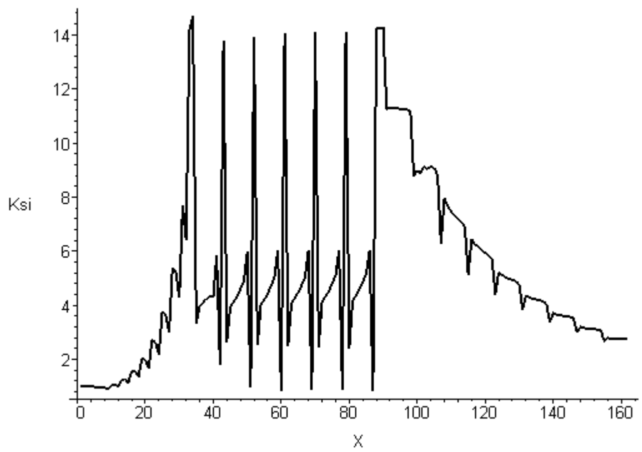

Рис. 5: Изменение осредненной по поперечному сечению функции $\tilde{\xi}(x)$ вдоль теплогенератора

Это замечание касается и графика функции $\bar{\tilde{\xi}}(x)/\tilde{\xi}_0$ (Рис. 5), отражающего поведение вдоль теплогенератора, осредненного по поперечному сечению, «вихря» $\bar{\tilde{\xi}}(x) = \frac{2}{R^2(x)} \int\limits_0^{R(x)} \tilde{\xi}\, r\, dr$. При отсутствии диффузора и конфузора до первого препятствия и после последнего препятствия вихрь принимает практически постоянные, но разные, значения. Перед первым препятствием значение функции $\bar{\tilde{\xi}}(x)$ резко возрастает, а после последнего – резко убывает. Над препятствиями и во впадинах поведение графика функции $\bar{\tilde{\xi}}(x)$ аналогично, приведенному графику на Рис. 5, хотя и имеются количественные отличия. Наибольшие значения вихрь достигает над препятствиями, что обусловлено большими значениями осевой составляющей скорости и условием прилипания жидкости на твердой стенке. Из Рис. 5 видно, что над препятствиями значение $\bar{\tilde{\xi}}(x)/\tilde{\xi}_0$ почти в 15 раз превышает значение $\bar{\tilde{\xi}}(0)/\tilde{\xi}_0$.

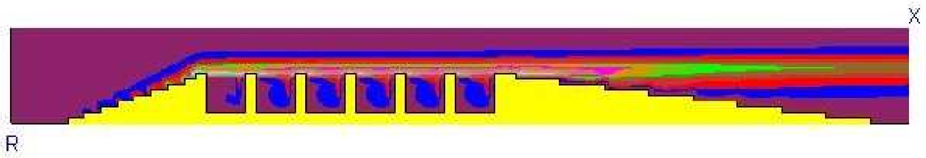

Рис. 6: Изолинии функции $\tilde{\xi} = \xi/r$

Итак, завихренность наиболее интенсивна непосредственно над препятствиями. После них она переносится вниз по потоку и, кроме того, генерируется на стенке диффузора. Как известно, течение в трубе кругового сечения под действием разности давления на концах трубы описывается параболой Пуазейля $u(0,r) = \frac{2Q}{\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$. Следовательно, если внутри трубы нет препятствий, то завихренность $\xi = \frac{4Q}{\pi R^4} r$ линейно зависит от радиуса, а функция $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{r} = \tilde{\xi}_0 = \frac{4Q}{\pi R^4}$ постоянна. Здесь $R = R(0)$ – внутренний радиус во входном сечении теплогенератора. При наличии препятствий внутри трубы функция $\tilde{\xi}$ уже не является постоянной величиной, что и иллюстрирует Рис. 6, на котором изображены линии постоянной «завихренности».

Рис. 7 характеризует поведение давления вдоль оси генератора (сплошная линия) и в окрестности препятствий. На нем представлены графики функции $P(x,r)/P_0$ при значениях $r \approx 0$ и $r \approx 0,4R$. Из графиков видно, что давление мало меняется вдоль радиуса за исключением участка трубы, где имеются препятствия.

Заключение

Таким образом, результаты численных экспериментов по расчету гидродинамических характеристик течения в трубе с резко изменяющимся внутренним радиусом указывают на их существенную неравномерность вдоль оси. Особенно хорошо это прослеживается на изменении интегральных характеристиках течения, т.е. на графиках функций гидродинамических величин, осредненных по поперечному сечению.

В плане дальнейших исследований, с точки зрения математического моделирования, представляет интерес не только расчет полей течений, возникающих в

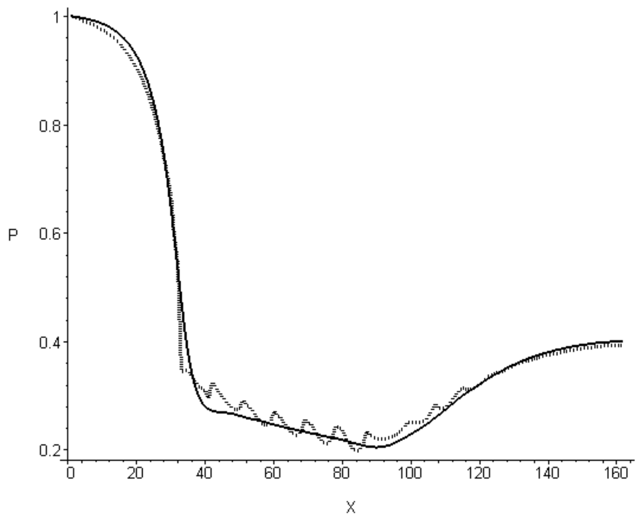

Рис. 7: Распределение давления в окрестности оси и в окрестности препятствий

генераторе, но и расчет тепловыделения за счет преобразования энергии закрученного потока жидкости, в данном случае тороидальных вихрей, в тепло. А также изучение влияния размеров и количества препятствий внутри трубы и наличия конфузора и диффузора на скорость нагрева жидкости.

Список литературы

[1] Фурмаков Е.Ф. Могут ли гидротермодинамические теплогенераторы работать сверхэффективно? СПб: ОАО «Техприбор», 2004. 22 с.

[2] Ахметов Ю.М., Калимуллин Р.Р., Целищев В.А. Численное и физическое моделирование течения жидкости в вихревом теплогенераторе // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2010. Т. 14, № 4 (39). С. 42–49.

[3] Климок В.И., Рубцов И.Ю. Математическое моделирование гидродинамического режима теплового вихрегенератора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 19. С. 21–27.

[4] Климок В.И., Рубцов И.Ю. Математическое моделирование гидротермодинамического режима теплового вихрегенератора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 1 (24). С. 25–36.

[5] Климок В.И. Численное моделирование течения жидкости в вихревом аксиальном теплогенераторе // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 5–13.

[6] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Иностранная литература, 1963.

Библиографическая ссылка

Климок В.И. Изменение интегральных характеристик течения жидкости в вихревом аксиальном теплогенераторе // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 35–44.

Сведения об авторах

1. **Климок Виктор Иванович**
профессор кафедры вычислительной математики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

CHANGE OF THE INTEGRAL CHARACTERISTICS OF THE FLUID FLOW IN THE AXIAL VORTEX HEAT GENERATOR

Klimok Viktor Ivanovich
Professor at Computational Mathematics department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 08.10.2016, revised 21.10.2016.

Mathematical model of axial heat generator based on the Navier-Stokes equations, written in cylindrical coordinates in the approximation of axial symmetry. The results of numerical experiments on the calculation of flow fields passive axial heat generator indicate a significant change in the unevenness of the hydrodynamic characteristics of the flow, averaged over the cross section.

Keywords: numerical experiment, integral characteristics, vortex heat generator, passive axial.

Bibliographic citation

Klimok V.I. Change of the integral characteristics of the fluid flow in the axial vortex heat generator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 4, pp. 35–44. (in Russian)

References

[1] Furmakov E.F. Mogut li Gidrotermodinamicheskie Teplogeneratory Rabotat' Sverkheffektivno? [Can Hydrothermodynamic Heat Generators Work Super-Efficiently?] Spb, Tehpribor JSC Publ., 2004. 22 p. (in Russian)

[2] Akhmetov Yu.M., Kalimullin R.R., Tselishchev V.A. Numerical and physical modeling of fluid flow in the vortex heat generator. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta* [Herald of Ufa State Aviation Technical University], 2010, vol. 14, no. 4 (39), pp. 42–49. (in Russian)

[3] Klimok V.I., Rubtsov I.Yu. Mathematical modeling of hydrodynamic mode in thermal vortex generator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2010, no. 19, pp. 21–27. (in Russian)

[4] Klimok V.I., Rubtsov I.Yu. Mathematical modeling of hydrothermodynamic mode in thermal vortex generator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2012, no. 1 (24), pp. 25–36. (in Russian)

[5] Klimok V.I. Numerical simulation of fluid flow in vortex axial heat generator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 5–13. (in Russian)

[6] Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya Gidromekhanika* [Theoretical Hydromechanics]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963. (in Russian)