

**О ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ
КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА**

Григорьева В.В.* , Шеретов Ю.В. **

* Тверской государственный технический университет, г. Тверь

** Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 27.02.2016, после переработки 10.03.2016.

Для нестационарных квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса предложено новое доказательство теоремы о диссипации полной кинетической энергии $E(t)$. Показано, что $E(t)$ не только убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, но и является выпуклой вниз функцией.

Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, приближение Стокса, диссипативные свойства.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 95–105.

Введение

Линеаризованная система Навье–Стокса, называемая еще системой Стокса, была предметом многочисленных исследований [1]. Она описывает медленные течения вязкой несжимаемой жидкости. В 1993 г. в [2] одним из авторов данной статьи была предложена еще одна система уравнений, получившая название квазигидродинамической (КГД). Она также применялась при аналитическом и численном моделировании движений жидкости. Обзоры полученных в этом направлении результатов представлены в [3–6].

Нестационарная квазигидродинамическая система в приближении Стокса исследовалась в [7, 8]. Доказана теорема о диссипации полной кинетической энергии в ограниченном объеме, установлен факт единственности классического решения, построено решение задачи Коши.

В настоящей работе для КГД системы в приближении Стокса приведено еще одно доказательство теоремы о диссипации полной кинетической энергии $E(t)$. Оно позволило получить новые результаты, касающиеся неотрицательности второй производной функции $E(t)$. Таким образом, $E(t)$ не только убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, но и является выпуклой вниз функцией.

1. Квазигидродинамическая система в приближении Стокса. Теорема о диссипации кинетической энергии

Квазигидродинамическая система в приближении Стокса без учета внешних массовых сил может быть записана в виде

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\tau}{\rho} \Delta p, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p = \eta(\Delta \vec{u} + \nabla \operatorname{div} \vec{u}). \quad (1.2)$$

Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона. Коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами, причем τ определяется с помощью выражения

$$\tau = \frac{\eta}{\rho c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Без ограничения общности постоянную среднюю плотность жидкости ρ положим равной единице.

Пусть V – ограниченная объемно и поверхностно односвязная область в евклидовом пространстве \mathbb{R}_x^3 с кусочно-гладкой границей ∂V , $\bar{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0, T_f]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$, $\bar{Q} = \bar{V} \times [0, T_f]$ – его замыкание, T_f – заданное положительное число или символ $+\infty$, соответственно. Параметр $t \in [0, T_f]$ будем интерпретировать как время. Дополним систему (1.1) – (1.2) начальным условием

$$\vec{u} \Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \bar{V}, \quad (1.3)$$

граничными условиями

$$\vec{u} \Big|_{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0, T_f], \quad (1.4)$$

а также условием нормировки

$$\int_V p \, dV = 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (1.5)$$

Определение 1. Решением начально-краевой задачи (1.1) – (1.5) назовем функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и $p = p(\vec{x}, t)$, удовлетворяющие при всех $(\vec{x}, t) \in Q$ уравнениям (1.1) – (1.2), а также условиям (1.3) – (1.5).

Изучим свойства решения (\vec{u}, p) поставленной начально-краевой задачи, считая, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Это решение будем считать достаточно гладким, например, бесконечно дифференцируемым в \bar{Q} .

Теорема 1. На любом решении системы (1.1) – (1.2) выполняется уравнение баланса кинетической энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(p\vec{u} - \tau p \nabla p - \eta(\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \vec{u} - \eta \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} \right) = -\Phi, \quad (1.6)$$

в котором

$$\Phi = \eta(\nabla \otimes \vec{u})^2 + \eta(\operatorname{div} \vec{u})^2 + \tau(\nabla p)^2 \quad (1.7)$$

– неотрицательная диссипативная функция,

$$(\nabla \otimes \vec{u})^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2.$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (1.2) скалярно на вектор \vec{u} . Это дает

$$\left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + (\vec{u} \cdot \nabla p) = \eta(\vec{u} \cdot \Delta \vec{u}) + \eta(\vec{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \vec{u}. \quad (1.8)$$

Справедливы равенства

$$\left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right), \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \Delta \vec{u}) &= \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i\right) - \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i\right) - \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 = \\ &= \operatorname{div} ((\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \vec{u}) - (\nabla \otimes \vec{u})^2, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} (\vec{u} \operatorname{div} \vec{u}) - (\operatorname{div} \vec{u})^2. \quad (1.11)$$

Подставив (1.9) – (1.11) в (1.8), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) + (\vec{u} \cdot \nabla p) - \eta \operatorname{div} ((\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \vec{u} + \vec{u} \operatorname{div} \vec{u}) = \\ = -\eta (\nabla \otimes \vec{u})^2 - \eta (\operatorname{div} \vec{u})^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Умножив теперь обе части (1.1) на p , преобразуем результат к виду

$$p \operatorname{div} \vec{u} = \tau \operatorname{div} (p \nabla p) - \tau (\nabla p)^2. \quad (1.13)$$

Складывая (1.12) и (1.13), получим (1.6). \square

Для любого $t \in [0, T_f]$ на решении поставленной начально–краевой задачи определим полную кинетическую энергию жидкости в объеме

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_V \vec{u}^2 dV. \quad (1.14)$$

Справедлива следующая теорема о диссипации кинетической энергии.

Теорема 2. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – решение начально–краевой задачи (1.1) – (1.5). Тогда при каждом $t \in [0, T_f]$ имеет место равенство

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_V \Phi dV. \quad (1.15)$$

На промежутке $[0, T_f]$ выполняется неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq 0, \quad (1.16)$$

и поэтому функция $E(t)$ является убывающей.

Доказательство. Пусть (\vec{u}, p) – решение начально–краевой задачи (1.1) – (1.5). Подставив его в (1.6), проинтегрируем полученное равенство по множеству V . Принимая во внимание правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} + \iint_{\partial V} (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS = - \int_V \Phi dV, \quad (1.17)$$

где

$$\vec{A} = p\vec{u} - \tau p \nabla p - \eta (\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \vec{u} - \eta \vec{u} \operatorname{div} \vec{u}.$$

Поверхностный интеграл второго рода в левой части (1.17) равен нулю в силу краевых условий (1.4) и свойств гладкости решения. Соотношение (1.15) непосредственно следует из (1.17). Неравенство (1.16) выполняется в силу неотрицательности Φ . \square

2. Характер убывания кинетической энергии

Следующие результаты дают дополнительную информацию о поведении функции $E(t)$.

Теорема 3. *На решении начально–краевой задачи (1.1) – (1.5) при любом $t \in [0, T_f]$ выполняются неравенства*

$$\frac{dE(t)}{dt} + ME(t) \leq 0 \quad (2.1)$$

и

$$\frac{dJ(t)}{dt} \leq 0, \quad (2.2)$$

где $J(t) = E(t)e^{Mt}$, M – положительная константа.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} -\frac{dE(t)}{dt} &= \int_V \Phi dV = \eta \int_V (\nabla \otimes \vec{u})^2 dV + \eta \int_V (\operatorname{div} \vec{u})^2 dV + \tau \int_V (\nabla p)^2 dV \geq \\ &\geq \eta \int_V (\nabla \otimes \vec{u})^2 dV = \eta \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dV \geq \frac{\eta}{c_F} \int_V \vec{u}^2 dV = \frac{2\eta}{c_F} E(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь было использовано (см. [9]) неравенство Фридрикса

$$\int_V \vec{u}^2 dV \leq c_F \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dV.$$

Оно выполняется для вектор-функций $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, которые при фиксированном $t \in [0, T_f]$ принадлежат классу гладкости $\mathbf{C}^1(\bar{V})$ и обращаются в нуль на ∂V . Здесь c_F – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V . Полагая $M = (2\eta)/c_F$, из (2.3) выводим (2.1).

Представим теперь (2.1) в эквивалентном виде

$$e^{-Mt} \frac{dJ(t)}{dt} \leq 0. \quad (2.4)$$

Неравенство (2.2) вытекает из (2.4), поскольку экспонента принимает только положительные значения. \square

Следствие 1. На промежутке $[0, T_f]$ функция $J(t)$ является убывающей.

Следствие 2. При любом $t \in [0, T_f]$ выполняется двойное неравенство

$$0 \leq E(t) \leq E(0)e^{-Mt}.$$

Следствие 3. При $T = +\infty$ полная кинетическая энергия $E(t)$ убывает на промежутке $[0, +\infty)$ и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема 4. На любом решении системы (1.1) – (1.2) выполняется равенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)^2 + \operatorname{div} \left(p \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \eta (\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \eta \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} - \tau p \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) = \\ - \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \otimes \vec{u})^2 - \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{u})^2 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство. Умножим скалярно (1.2) на $\partial \vec{u} / \partial t$. Это дает

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \nabla p\right) = \eta \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \Delta \vec{u}\right) + \eta \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \nabla\right) \operatorname{div} \vec{u}. \quad (2.6)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \Delta \vec{u}\right) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 = \\ &= \operatorname{div} \left((\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \otimes \vec{u})^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \nabla\right) \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} \right) - \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} \right) - \operatorname{div} \vec{u} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} = \end{aligned}$$

$$= \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{u})^2. \quad (2.8)$$

С помощью (2.7) и (2.8) преобразуем (2.6) к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \nabla p \right) &= \eta \operatorname{div} \left((\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} \right) - \\ &- \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \otimes \vec{u})^2 - \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{u})^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Продифференцируем (1.1) по времени, а затем умножим результат на функцию p . Будем иметь

$$p \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} = \tau p \frac{\partial}{\partial t} (\Delta p). \quad (2.10)$$

Эквивалентная запись (2.10) такова:

$$p \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = \tau p \operatorname{div} \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (2.11)$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} p \operatorname{div} \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) &= \operatorname{div} \left(p \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) - \left(\nabla p \cdot \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) = \\ &= \operatorname{div} \left(p \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) - \left(\nabla p \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla p \right) = \\ &= \operatorname{div} \left(p \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p)^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Учитывая (2.12), приведем (2.11) к виду

$$p \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = \tau \operatorname{div} \left(p \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p)^2. \quad (2.13)$$

Сложив (2.9) и (2.13), получим (2.5). \square

Теорема 5. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – решение начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). Тогда при каждом $t \in [0, T]$ имеет место равенство

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -2 \int_V \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 dV, \quad (2.14)$$

где

$$\Psi(t) = \int_V \Phi dV, \quad (2.15)$$

Φ – неотрицательная диссипативная функция, определяемая формулой (1.7). На промежутке $[0, T_f]$ выполняется неравенство

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} \leq 0, \quad (2.16)$$

и поэтому функция $\Psi(t)$ является убывающей.

Доказательство. Если (\vec{u}, p) – решение начально–краевой задачи (1.1) – (1.5), то подставив его в (2.5), проинтегрируем полученное равенство по множеству V . Принимая во внимание правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\int_V \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 dV + \iint_{\partial V} (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \Phi dV, \quad (2.17)$$

где

$$\vec{B} = p \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \eta (\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \eta \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} - \tau p \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right).$$

Поверхностный интеграл в (2.17) равен нулю, поскольку

$$\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|_{\partial V} = 0, \quad \left. (\vec{n} \cdot \nabla) \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right|_{\partial V} = \left. \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \cdot \nabla p) \right|_{\partial V} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (2.18)$$

Условия (2.18) вытекают из (1.4) и свойств гладкости решения. Равенство (2.14) следует из (2.17), если принять во внимание обозначение (2.15). Неравенство (2.16) вытекает из (2.14). \square

Теорема 6. На любом решении (\vec{u}, p) начально–краевой задачи (1.1) – (1.5) при каждом $t \in [0, T]$ имеет место соотношение

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} = 2 \int_V \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 dV. \quad (2.19)$$

На промежутке $[0, T_f]$ выполняется неравенство

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} \geq 0 \quad (2.20)$$

и поэтому $E(t)$ является выпуклой вниз функцией.

Доказательство. Продифференцируем (1.15) по времени. Будем иметь

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} = -\frac{d}{dt} \int_V \Phi dV = -\frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (2.21)$$

Соотношение (2.19) является следствием (2.21) и (2.14). Неравенство (2.20) выполняется, поскольку правая часть (2.19) неотрицательна. \square

Заключение

Для классической нестационарной системы Стокса функция $E(t)$ также является убывающей и выпуклой вниз. Кроме того, она стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Доказательства могут быть проведены по той же схеме. Тем самым, связь между системой Стокса и квазигидродинамической системой в приближении Стокса становится очевидной.

Список литературы

- [1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
- [2] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.
- [3] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000. 235 с.
- [4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
- [5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2016. 222 с.
- [6] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. 124 с.
- [7] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 21. С. 5–26.
- [8] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. Решение задачи Коши для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2015. С. 50–55.
- [9] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

Библиографическая ссылка

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О диссипативных свойствах квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 95–105.

Сведения об авторах

1. Григорьева Вера Владимировна

доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, 22, ТвГТУ. E-mail: pontida@list.ru.

2. Шеретов Юрий Владимирович

заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ.

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON THE DISSIPATIVE PROPERTIES OF QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN STOKES APPROXIMATION

Grigoryeva Vera Vladimirovna

Associate Professor at Higher Mathematics department,
Tver State Technical University

Russia, 170026, Tver, A. Nikitin emb., 22, TvSTU. E-mail: pontida@list.ru

Sheretov Yurii Vladimirovich

Head of Mathematical Analysis department, Tver State University

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TvSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 27.02.2016, revised 10.03.2016.

For non-stationary quasi-hydrodynamic equations in Stokes approximation new proof of the theorem on the dissipation of total kinetic energy $E(t)$ is proposed. It is shown, that $E(t)$ not only decreases and tends to zero under $t \rightarrow +\infty$, but it is convex down function.

Keywords: quasi-hydrodynamic equations, Stokes approximation, dissipative properties.

Bibliographic citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. On the dissipative properties of quasi-hydrodynamic equations in Stokes approximation. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 95–105. (in Russian)

References

- [1] Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie Voprosy Dinamiki Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid]. Nauka Publ., Moscow, 1970. 288 p. (in Russian)
- [2] Sheretov Yu.V. On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1994, vol. 6(10), pp. 35–45. (in Russian)
- [3] Sheretov Yu.V. *Matematicheskoe Modelirovanie Tehenii Zhidkosti i Gaza na Osnove Kvazigidrodinamicheskikh i Kvazigazodinamicheskikh Uravnenii* [Mathematical Modeling of Fluid and Gas Flows on the Basis of Quasi-Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2000. 235 p. (in Russian)
- [4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno-Vremennom Osrednenii* [Dynamics of Continuous Media with Spatial-Temporal Averaging]. NITS “Regular and Chaotic Dynamics”, Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p. (in Russian)

- [5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Equations of Hydrodynamics]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)
- [6] Zherikov A.V. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskikh Uravnenii: Matematicheskoe Modelirovanie Tsecheniy Vyazkoi Neshhimaemoi Zhidkosti* [Application of Quasi-Hydrodynamic Equations: Mathematical Modeling of Viscous Incompressible Fluid]. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010. 124 p. (in Russian)
- [7] Sheretov Yu.V. Methods for constructing exact solutions of quasi-hydrodynamic equations. *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2011, no. 2, pp. 5–26. (in Russian)
- [8] Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. Solution of the Cauchy problem for quasi-hydrodynamic equations in the Stokes approximation. *Primenenie Funktsional'nogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory]. Tver State University, Tver, 2015. Pp. 50–55. (in Russian)
- [9] Rektoris K. *Variatsionnye Metody v Matematicheskoi Fizike i Tekhnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]. Mir Publ., Moscow, 1985. 589 p. (in Russian)