

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.87:621.5

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВИХРЕВОМ АКСИАЛЬНОМ ТЕПЛОГЕНЕРАТОРЕ

Климок В.И.

Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 21.08.2015, после переработки 23.08.2015.

Выполнены численные эксперименты по расчету гидродинамического режима пассивного вихревого аксиального теплогенератора. Поля течений найдены из решения системы уравнений для вихря и функции тока.

Ключевые слова: численный эксперимент, вихревой теплогенератор, пассивный аксиальный.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 5–13.

Введение

За последнее десятилетие появилось немало патентов об экспериментальных исследованиях применения вихревых теплогенераторов для получения горячей воды путем преобразования энергии закрученного потока жидкости в тепло. Результаты экспериментов показали, что вихревой теплогенератор имеет высокий коэффициент полезного действия и представляет большой интерес для народного хозяйства как альтернативный экологически чистый источник тепловой энергии.

В статье [1] рассмотрены и систематизированы конструкции гидродинамических теплогенераторов. Из множества конструкторских решений в ней выделены три существенно различающиеся между собой разновидности теплогенераторов: пассивные тангенциальные, пассивные аксиальные и активные. К пассивным отнесены теплогенераторы статического типа, не содержащие подвижных частей в устройствах, где формируется поток жидкости.

Кроме экспериментальных испытаний конкретных установок весьма интересны и чисто теоретические исследования, касающиеся гидродинамики и внутреннего тепловыделения закрученных потоков жидкости. Публикаций результатов математического моделирования гидродинамического режима вихревого аксиального теплогенератора не найдено.

Аксиальный теплогенератор представляет собой цилиндр со сложной внутренней геометрией, способствующей образованию вихрей. В данном варианте внутренний радиус цилиндра периодически скачкообразно изменяется, то есть внутри трубы имеются препятствия для генерации тороидальных вихрей между

ними. В зависимости от конструкции аксиального теплогенератора в начальной части может иметься конфузур, а в конечной части – диффузор.

Течения вязкой несжимаемой жидкости описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Навье-Стокса), а если еще учесть сложную конфигурацию теплогенератора, то становится понятно, что такую задачу можно решить только с использованием численных методов.

1. Постановка задачи

Для математического моделирования гидродинамических процессов, протекающих в вихревом теплогенераторе, основанном на преобразовании энергии завихренного потока в тепло, воспользуемся уравнениями гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости, записанными в цилиндрической ортогональной системе координат r, ϑ, x [2]. Пренебрегая действием массовых сил и влиянием выделенного тепла на движение, выпишем уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах в приближении осевой симметрии движения (то есть все функции не зависят от угла ϑ) и с учетом обозначений $v_r = v, v_\vartheta = w, v_x = u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v w}{r} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Здесь u – составляющая скорости вдоль оси трубы; v – составляющая скорости вдоль радиуса; w – окружная (азимутальная) составляющая скорости, характеризующая закрутку течения в трубе; ρ – плотность; P – давление; ν – кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение сохранения массы (4) будет выполнено, если компоненты скорости u и v записать в виде

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5)$$

где $\psi(x, r)$ – функция тока. Тогда азимутальная компонента завихренности

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (6)$$

будет связана с функцией тока уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \xi. \quad (7)$$

Исключая перекрестным дифференцированием градиенты давления из уравнений (1) и (2), приходим к уравнению для вихря

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u \xi}{\partial x} + \frac{\partial v \xi}{\partial r} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \frac{w^2}{r}.$$

Последнее уравнение и уравнение (3) с учетом уравнения неразрывности и обозначений $\tilde{\xi} = \xi/r$ и $\tilde{w} = w r$ перепишем в виде

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} = \nu \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{r^4} \frac{\partial \tilde{w}^2}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = \nu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right]. \quad (9)$$

При записи уравнения (8) было учтено, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \xi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r^2 \tilde{\xi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} \right).$$

В отличие от тангенциального теплогенератора в аксиальном теплогенераторе вода «поступает» в трубу без закрутки, поэтому значение азимутальной составляющей скорости $w = 0$ тождественно удовлетворяет уравнению (9) и его можно не учитывать. В этом случае равно нулю и последнее слагаемое в правой части уравнения (8). Следует также отметить, что аксиальный теплогенератор технически проще в изготовлении, чем тангенциальный теплогенератор.

Итак, для расчета полей течений аксиального вихревого теплогенератора использовались соотношения (5) и уравнения (7), (8) с соответствующими краевыми условиями, о которых будет сказано ниже. Для оптимизации конструкции аксиального теплогенератора к системе уравнений для «вихря» и функции тока добавлялось уравнение для расчета давления жидкости P внутри теплогенератора

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = -2\rho r \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (10)$$

Уравнение (10) получено комбинацией уравнений для осевой (1) и радиальной (2) составляющих скорости с уравнением неразрывности (4). Для каждой конкретной внутренней конфигурации теплогенератора оценивалась потеря энергии, возникающая вследствие прохождения потока жидкости через теплогенератор, которая выражалась через разность между полным давлением на входе и полным давлением на выходе. Заметим, что в правой части уравнения (10) отсутствует слагаемое $\rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{r^2} \right)$, так как в аксиальном теплогенераторе азимутальная составляющая скорости $w = 0$.

2. Метод решения

Порядок вычислений следующий. Сначала с помощью уравнения (6) находится значение вихря на стенке, после чего с помощью уравнения (8) рассчитывается

завихренность в жидкости. Затем по найденной из уравнения (7) функции тока ψ вычисляются скорости u и v с использованием соотношений (4). Описанный процесс повторяется на каждом шаге по времени. Исключение составляет задание начального приближения, которое строится следующим образом. По заданному расходу находится значение функции тока на стенке с учетом того, что ось трубы является линией тока с нулевым значением. После этого функция тока рассчитывается внутри области с нулевой завихренностью в правой части уравнения (7) и по найденной функции тока определяются начальные значения составляющих скорости u и v .

При решении дифференциальных уравнений в частных производных применялся метод конечных разностей. На Рис. 1 приведено расположение узловых точек, в которых определялись искомые функции $\tilde{\xi}$, ψ , P , u , v и \tilde{w} .

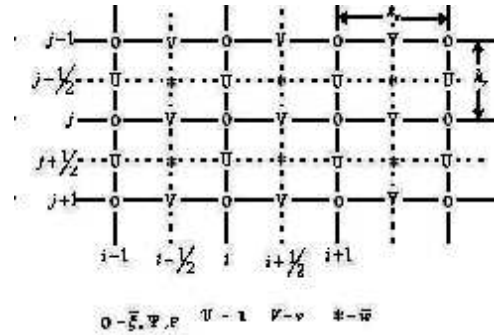


Рис. 1: Расположение узловых точек, в которых определялись искомые функции $\tilde{\xi}$, ψ , P , u , v и \tilde{w}

При конечно-разностной аппроксимации уравнения для функции $\tilde{\xi}$ использовалась схема «естественного фильтра» по времени и монотонная консервативно-диссипативная схема второго порядка точности по пространственным переменным.

На входе в теплогенератор ($x = 0$) радиальная составляющая скорости задавалась равной нулю, а распределение осевой составляющей скорости определялось параболой Пуазейля

$$u(0, r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где Q – расход, R – радиус цилиндра во входном сечении теплогенератора. Согласно первому уравнению (5) значение функции тока при $0 \leq r \leq R$ и $x = 0$ определялось по формуле

$$\psi(0, r) = - \int_0^r u(0, r) r dr = - \frac{Q}{\pi R^2} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right).$$

Величина $\tilde{\xi}$ находилась из уравнения (6), давление считалось постоянным и равным P_0 .

На боковой твердой стенке теплогенератора принималось условие прилипания для скоростей, функция тока считалась постоянной и равной $-\frac{Q}{2\pi}$, вихрь находился с помощью уравнения (6), производная от давления по направлению внешней нормали считалась равной нулю.

На оси трубы ($r = 0$) использовались условия симметрии для осевой составляющей скорости u и «завихренности» ξ , равенство нулю радиальной составляющей скорости v и функции тока ψ . Давление определялось по формуле

$$P(x, 0) = P_0 + \rho\nu \left\{ \int_0^x \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(x, 0)}{\partial r} \right) \frac{dx}{r} - \frac{1}{2\nu} [u^2(x, 0) - u^2(0, 0)] + \left[\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \right] \right\},$$

которая получается из уравнения (1).

На выходе из теплогенератора для расчета $\tilde{\xi}$ и ψ привлекались соответствующие уравнения (8) и (7) с условием равенства нулю производной по направлению внешней нормали. Такое же условие принималось для радиальной составляющей скорости. Осевая компонента градиента давления на выходе из теплогенератора находилась из первого уравнения движения (1).

3. Результаты расчета гидродинамического режима вихревого теплогенератора

Так как течение предполагается осесимметричным, то достаточно вести расчеты и представить результаты в какой-либо меридиональной плоскости (проходящей через ось симметрии x) и рассматривать не всю конфигурацию сечения теплогенератора этой плоскостью, а ее половину, ограниченную осью симметрии и стенкой.

Было выполнено несколько численных экспериментов.

В первом из них теплогенератор имел семь резко сужающихся и шесть резко расширяющихся участков сечения цилиндра, последние в дальнейшем будем называть впадинами. После них цилиндр постепенно расширяется, то есть в конечной части имеется диффузор, который присутствует и в других, обсуждаемых ниже, результатах расчетов.

На Рис. 2 приведены изолинии функции тока, которые качественно вполне характеризуют характер течений, возникающих внутри цилиндра и на выходе из него.

На Рис. 3 представлено распределение давления рабочей жидкости внутри теплогенератора, то есть изображены изобары (линии равного давления).

Изолинии функции тока и поле течений указывают на появление между препятствиями вихрей, примерно одинаковой интенсивности, вращающихся по направлению часовой стрелки (ось симметрии расположена сверху, стенка – внизу). Радиальная составляющая скорости во впадинах достигает 1 м/с. Перед первым же препятствием ее значение приближается к 10 м/с. Наибольшее значение осевой

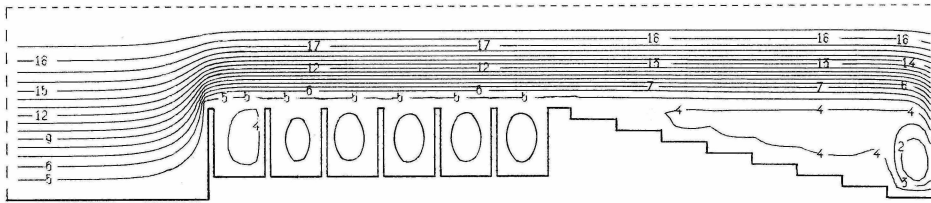


Рис. 2: Изолинии функции тока в первом численном эксперименте

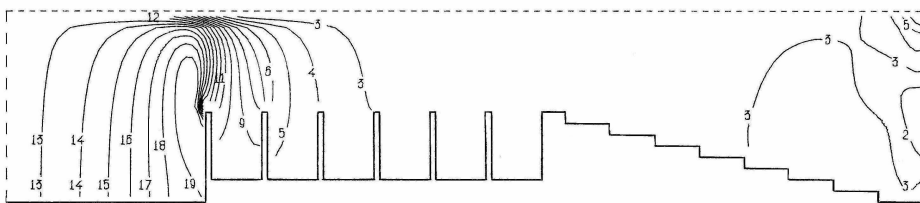


Рис. 3: Распределение давления жидкости внутри теплогенератора

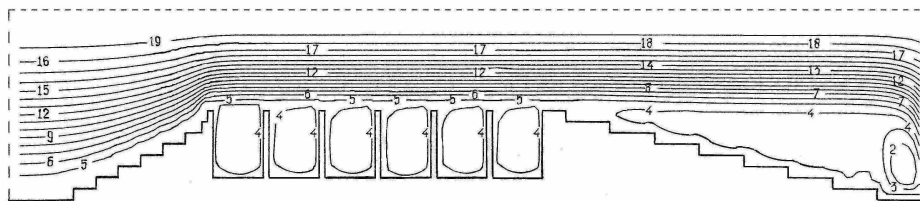


Рис. 4: Изолинии функции тока во втором численном эксперименте

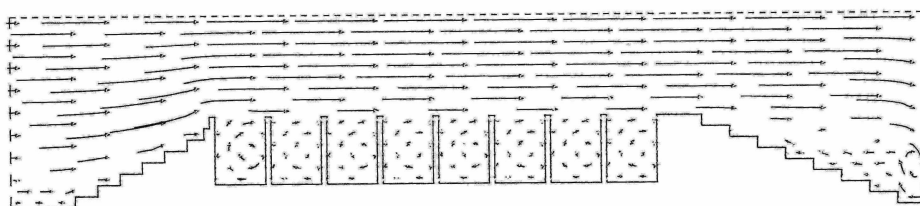


Рис. 5: Поле течений

составляющей скорости до 24 м/с наблюдается в самой узкой части теплогенератора над препятствиями. Между препятствиями во впадинах она порядка 2 м/с и такого же порядка в окрестности стенки диффузора, где осуществляется подток жидкости из емкости, в которую подается вода из теплогенератора.

Потеря давления составила 245 кПа. Изолинии давления представлены на Рис. 3.

Во втором численном эксперименте конструкция теплогенератора была изменена. До первого препятствия цилиндр расширялся постепенно, то есть имелся конфузор (Рис. 4). Структура течения осталась практически прежней, только наибольшее значение радиальной составляющей скорости уменьшилась до 6 м/с. Потеря давления составила 113 кПа, то есть более чем в два раза меньше, чем в предыдущем эксперименте.

В остальных расчетах конструкция теплогенератора изменялась только добавлением в каждом варианте одного лишнего препятствия, что влекло за собой изменение угла наклона диффузора. Чем больше препятствий, тем менее постепенно происходит расширение цилиндра после последнего из них. Потери давления в этих расчетах составили соответственно: 245, 113, 202, 108, 112, 198 кПа. Заметим, что, вообще говоря, следует выбирать такую внутреннюю конструкцию теплогенератора, чтобы обеспечить наибольшее увеличение температуры воды в емкости и наименьшие потери давления в теплогенераторе.

Тангенциальный теплогенератор, в отличие от аксиального теплогенератора, состоит из двух соединенных между собой цилиндров разного диаметра, имеющих общую ось (Рис. 6). Подача жидкости в цилиндр с большим диаметром осуществляется по трубе, ось которой перпендикулярна к оси цилиндра, но не пересекается с ней. То есть, жидкость подается в теплогенератор по периферии цилиндра большего диаметра, а затем попадает в цилиндр меньшего диаметра. Истечение жидкости из цилиндра большего диаметра сопровождается сильным вращением, поскольку момент количества движения струи жидкости на входе в теплогенератор относительно оси выходного отверстия не равен нулю.

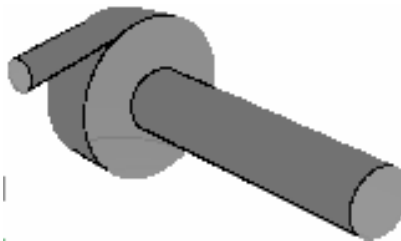


Рис. 6: Тангенциальный теплогенератор

Следует заметить, что выполненные численные эксперименты [4] по расчету гидротермодинамического режима вихревого тангенциального теплогенератора вполне соответствуют результатам экспериментальных исследований [5].

При моделировании гидродинамического режима тангенциального вихревого теплогенератора использовались соотношения (5) и уравнения (7), (8), (9). В общих чертах краевые условия заключаются в том, что на оси трубы принимаются условия симметрии для u , \tilde{w} , $\tilde{\xi}$, равенство нулю радиальной составляющей ско-

рости и функции тока, а на стенках — условие прилипания для скоростей и постоянство функции тока. Более подробная информация о конструкции вихревого тангенциального теплогенератора, краевых условиях и результатах расчетов имеется в [3].

Заключение

В плане дальнейших исследований, с точки зрения математического моделирования, представляет интерес расчет *гидротермодинамического* режима пассивного *аксиального* вихревого теплогенератора. Изучение влияния количества препятствий внутри трубы и наличия конфузора и диффузора на скорость нагрева жидкости.

Список литературы

- [1] Фурмаков Е.Ф. Могут ли гидротермодинамические теплогенераторы работать сверхэффективно? СПб: ОАО «Техприбор», 2004. 22 с.
- [2] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Иностранная литература, 1963. Ч. 2.
- [3] Климок В.И., Рубцов И.Ю. Математическое моделирование гидродинамического режима теплового вихрегенератора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 19. С. 21–27.
- [4] Климок В.И., Рубцов И.Ю. Математическое моделирование гидротермодинамического режима теплового вихрегенератора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 1(24). С. 25–36.
- [5] Ахметов Ю.М., Калимуллин Р.Р., Целищев В.А. Численное и физическое моделирование течения жидкости в вихревом теплогенераторе // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2010. Т. 14, № 4(39). С. 42–49.

Библиографическая ссылка

Климок В.И. Численное моделирование течения жидкости в вихревом аксиальном теплогенераторе // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 5–13.

Сведения об авторах

1. Климок Виктор Иванович

профессор кафедры вычислительной математики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, факультет ПМиК.

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW IN VORTEX AXIAL HEAT GENERATOR

Klimok Viktor Ivanovich

Professor at Computational Mathematics department,
Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 21.08.2015, revised 23.08.2015.

The mathematical modeling results of the hydro dynamical regime in the passive vorticity axial heat generators were obtained by numerical experiments. The currents fields were found from solution of a set of two equations for vorticity and stream function.

Keywords: numerical experiment, a vorticity heat generator, passive axial.

Bibliographic citation

Klimok V.I. Numerical simulation of fluid flow in vortex axial heat generator. *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 5–13. (in Russian)