

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Басинский К.Ю.

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

---

*Поступила в редакцию 17.06.2015, после переработки 20.06.2015.*

---

Рассмотрена нелинейная задача о распространении волн по свободной поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Задача решена первым методом Стокса с точностью второго приближения. Получены выражения для траекторий частиц жидкости, а также для скорости приповерхностного течения. Проанализировано влияние вязкости и глубины на форму траекторий жидких частиц и переносную скорость.

**Ключевые слова:** волновые возмущения, вязкость, траектории частиц.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 15–24.*

### Введение

Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слоя идеальной жидкости приведено в работах [1], [2]. В работе [2] также найдены нелинейные траектории жидких частиц. Для вязкой жидкости известно решение линейной задачи [3], [4], [5], а нелинейная задача решена только для приближения слабовязкой жидкости [6]. Данная работа посвящена определению нелинейных выражений для скорости, давления и формы свободной поверхности при волновом движении вязкой жидкости, а также определению траекторий жидких частиц.

### 1. Нелинейная задача о волнах на поверхности вязкой жидкости

Рассматривается слой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением  $P_a$  (в частности, атмосферным). Декартова система координат задана так, что плоскость  $z^* = 0$  совпадает с невозмущённой поверхностью, а ось  $z^*$  противоположно направлена вектору силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Движение жидкости происходит в плоскости  $x^*z^*$  со скоростью  $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$ . Звездочкой, там, где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины.

Пусть в положительном направлении оси  $x^*$  распространяется волна длины  $\lambda$ . Длина волны много больше ее высоты ( $\lambda \gg \xi_{\max}^*$ ). В области, занятой жидкостью, выполняются уравнения неразрывности и движения

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \nabla) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^*, \quad (1)$$

Здесь  $p^* = P - P_a + \rho g z^*$  — динамическое давление,  $\rho$  — плотность,  $P$  — давление,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости.

На свободной поверхности  $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$  задаются кинематическое и динамическое условия

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \\ p_{nn} &= -P_a, \quad p_{n\tau} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При бесконечном заглублении скорость жидкости должна затухать, т.е. выполнено условие

$$\mathbf{u}^* \rightarrow 0, \quad z^* \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Система уравнений (1) и граничных условий (2), (3) является замкнутой и составляет нелинейную краевую задачу для определения характеристик волнового движения.

Введем следующие безразмерные переменные и величины

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u}, \quad p^* = \varepsilon \rho c_0^2 p, \quad \xi^* = \varepsilon \xi / k, \quad \nu_0 = \mu k / \rho c_0,$$

$$t = k c t^*, \quad x = k x^*, \quad z = k z^*, \quad \alpha = c / c_0 = \omega / \omega_0, \quad c_0^2 = g / k,$$

где  $c_0$  и  $\omega_0$  — соответственно фазовая скорость и частота волны линейной задачи для идеальной жидкости,  $c$  и  $\omega$  — фазовая скорость и частота волны,  $\varepsilon = k \xi_{\max}^*$  — малый волновой параметр,  $k = 2\pi / \lambda$  — волновое число.

В безразмерных переменных задача (1)-(3) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{u} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$p - \xi - 2\nu_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\varepsilon \nu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left( \xi - p - 2\nu_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right), \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$\nu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \left( 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) = -4\nu_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

В силу малости волнового параметра  $\varepsilon$  граничные условия на свободной поверхности  $z = \varepsilon \xi$  разложением в ряд Маклорена входящих в них функций сводятся к условиям на фиксированной поверхности  $z = 0$ .

Решение задачи находим в виде рядов по параметру  $\varepsilon$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_n = (u_i, 0, v_i), \quad p = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} p_i, \quad \xi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \xi_i.$$

Подставляя эти ряды в уравнения (4) и разложенные в окрестности нуля граничные условия и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим задачи в первых двух приближениях.

В первом приближении задача имеет вид: при  $\varepsilon^0$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1, \quad (5)$$

$$v_1 = \alpha \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad p_1 - \xi_1 - 2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathbf{u}_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty,$$

для второго приближения: при  $\varepsilon^1$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 - (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1, \quad (6)$$

$$v_2 = \alpha \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \xi_1), \quad p_2 - \xi_2 - 2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1 \right), \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 4 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad z = 0,$$

$$\mathbf{u}_2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Решение линейной задачи (5) имеет вид [5]

$$u_1 = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} [e^z \cos(x-t) + (aV_1 + bV_2) \cos(x-t) + (aV_2 - bV_1) \sin(x-t)], \quad (7)$$

$$v_1 = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{e^z \sin(x-t) + V_1 \cos(x-t) + V_2 \sin(x-t)\},$$

$$p_1 = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + \beta \sin \chi), \quad \xi_1 = \frac{A}{\alpha^2 + s^2} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + s \sin \chi),$$

$$V_1(z) = e^{bz} (B_1 \cos az - B_2 \sin az), \quad V_2(z) = e^{bz} (B_2 \cos az + B_1 \sin az),$$

$$B_1 = -2\nu_0 \alpha A / (\alpha^2 + s^2), \quad B_2 = -2\nu_0 s A / (\alpha^2 + s^2).$$

Здесь  $\beta$  — безразмерный декремент затухания ( $\beta \omega_0$  — размерный),  $A$  — амплитудный параметр,  $s = 2\nu_0 - \beta$ . Параметры  $a$  и  $b$  связаны соотношениями  $a^2 = b^2 - 1 + \beta/\nu_0$ ,  $2ab = \alpha/\nu_0$ .

Частота волны через декремент затухания выражается следующим образом

$$\alpha^2 = 1 + s^2 - 4\nu_0^3/s.$$

Для декремента затухания получено уравнение

$$s^6 + s^4 - 4\nu_0^4 s^2 - 4\nu_0^6 = 0,$$

аналитическое решение которого найдено, но не приведено здесь из-за своей громоздкости.

Подставив выражения (7) в задачу (6), получим систему линейных неоднородных уравнений и граничных условия для определения неизвестных функций  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $p_2$  и  $\xi_2$ , решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left\{ e^{2z} D_2 + 1/2 [a_1 V_3 + b_1 V_4 + a V_5 + (b+1) V_6] \right\} \cos(2x-2t) + \\ &\quad + \left\{ -e^{2z} D_1 + 1/2 [a_1 V_4 - b_1 V_3 + a V_6 - (b+1) V_5] \right\} \sin(2x-2t), \\ v_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left[ (e^{2z} D_1 + V_3 + V_5) \cos(2x-2t) + (e^{2z} D_2 + V_4 + V_6) \sin(2x-2t) \right], \\ p_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left\{ [e^{2z} (\beta D_1 + \alpha D_2) + V_7] \cos(2x-2t) + [e^{2z} (\beta D_2 - \alpha D_1) + V_8] \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sin(2x-2t) - e^z A V_2 + A B_2 + A^2 [(2\nu_0 - \beta s) / (\alpha^2 + s^2) - e^{2z}] / 2 + \\ &\quad \left. + (B_1^2 + B_2^2) (1 - e^{2z}) / 2 \right\}, \\ \xi_2 &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ [\alpha (D_2 + B_4 + K_2 - Q_2) - \beta (D_1 + B_3 + K_1 + Q_1)] \cos(2x-2t) - \right. \\ &\quad \left. - [\beta (D_2 + B_4 + K_2 - Q_2) + \alpha (D_1 + B_3 + K_1 + Q_1)] \sin(2x-2t) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_3(z) &= e^{b_1 z} (B_3 \cos a_1 z - B_4 \sin a_1 z), \quad V_4(z) = e^{b_1 z} (B_4 \cos a_1 z + B_3 \sin a_1 z), \\ V_5(z) &= e^{(b+1)z} (K_1 \cos az - K_2 \sin az), \quad V_6(z) = e^{(b+1)z} (K_2 \cos az + K_1 \sin az), \\ V_7(z) &= e^{(b+1)z} (G_1 \cos az - G_2 \sin az), \quad V_8(z) = e^{(b+1)z} (G_2 \cos az + G_1 \sin az), \\ a_1^2 &= b_1^2 - 4 + 2\beta/\nu_0, \quad a_1 b_1 = \alpha/\nu_0, \\ K_1 &= \{[(b+1)R_1 + aR_2]C_1 - [aR_1 - (b+1)R_2]C_2\}/\Delta_1, \quad \Delta_1 = (C_1^2 + C_2^2)/2, \\ K_2 &= \{[aR_1 - (b+1)R_2]C_1 + [(b+1)R_1 + aR_2]C_2\}/\Delta_1, \\ G_1 &= \{[\alpha a + \beta(b-1)]K_1 - [\alpha(1-b) + \beta a]K_2 + 2R_2\}/4, \\ G_2 &= \{[\alpha(1-b) + \beta a]K_1 + [\alpha a + \beta(b-1)]K_2 + 2R_1\}/4, \\ C_1 &= [4a\nu_0^2 - \alpha(\beta + 2\nu_0)]/(2\nu_0), \quad C_2 = [8b\nu_0^2 - \alpha_0^2 + \beta_0^2 - 4\nu_0 s]/(4\nu_0), \\ R_1 &= A[(2b\nu_0 - s)B_1 + (\alpha - 2a\nu_0)B_2]/(2\nu_0), \\ R_2 &= A[(\alpha - 2a\nu_0)B_1 - (2b\nu_0 - s)B_2]/(2\nu_0), \\ B_3 &= \nu_0[s_1(L_2 - 4D_1) + \alpha(L_1 - 4D_2)]/\Delta_2, \quad \Delta_2 = s_1^2 + \alpha^2, \\ B_4 &= \nu_0[s_1(L_1 - 4D_2) - \alpha(L_2 - 4D_1)]/\Delta_2, \quad s_1 = 4\nu_0 - \beta, \\ L_1 &= A^2 \{a[4\nu_0^2(\alpha^2 - s^2)/\Delta_3 - s - K_1] + \alpha b[1 - K_2 + 8\nu_0 s/\Delta_3] - 3\alpha + \\ &\quad + [(\beta - 6\nu_0)K_2 - \alpha K_1]/(2\nu_0)\}/\Delta_3, \quad \Delta_3 = s^2 + \alpha^2, \\ L_2 &= A^2 \{b[4\nu_0^2(\alpha^2 - s^2)/\Delta_3 - s - K_1] - \alpha a[1 - K_2 + 8\nu_0 s/\Delta_3] + 3s + \\ &\quad + [(\beta - 6\nu_0)K_1 + \alpha K_2]/(2\nu_0)\}/\Delta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= (F_1 J_1 + F_2 J_2) / \Delta_4, & D_2 &= (F_1 J_2 - F_2 J_1) / \Delta_4, & \Delta_4 &= J_1^2 + J_2^2, \\
J_1 &= [8\nu_0^2 (\alpha a_1 + s_1 b_1) - s_1 / \Delta_2] - s_1, & J_2 &= [8\nu_0^2 (\alpha b_1 - s_1 a_1) - \alpha / \Delta_2] + \alpha, \\
F_1 &= A^2 [2\nu_0(\alpha - s) / \Delta_3 + 1] [2\nu_0(\alpha + s) / \Delta_3 - 1] / 2 + I_1 K_1 + I_2 K_2 - G_1 + H_1 L_1 + \\
&\quad + H_2 L_2 + (\beta Q_1 - \alpha Q_2) / (2\Delta_5), & \Delta_5 &= (\alpha^2 + \beta^2), \\
F_2 &= 2\alpha\nu_0 A^2 (1 - 2s\nu_0 / \Delta_3) / \Delta_3 + I_2 K_1 - I_1 K_2 + G_2 - H_2 L_1 + H_1 L_2 + \\
&\quad + (\beta Q_2 + \alpha Q_1) / (2\Delta_5), \\
I_1 &= 2b\nu_0 + (4\nu_0 - \beta / \Delta_5) / 2, & I_2 &= -2a\nu_0 + \alpha / (2\Delta_5), \\
H_1 &= [2\alpha\nu_0^2 b_1 - 2s_1\nu_0^2 a_1 + \alpha\nu_0^2 s / \Delta_5] / \Delta_3, \\
H_2 &= [2\alpha\nu_0^2 a_1 + 2s_1\nu_0^2 b_1 + (\beta s_1 - \alpha^2) / \Delta_5] / \Delta_3.
\end{aligned}$$

## 2. Волновые траектории жидких частиц

Физические координаты частицы  $x^*(t^*)$ ,  $z^*(t^*)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \mathbf{u}^*, \quad \frac{dz^*}{dt^*} = \mathbf{v}^*.$$

Физическое время необходимо обезразмерить частотой колебания жидкой частицы  $\sigma$ , так как для нелинейных волн даже в идеальной жидкости  $\sigma$  не совпадает с частотой волны [2].

Учитывая, что

$$x^* = ct^* + x/k, \quad z^* = z/k, \quad t^* = t/\sigma, \quad \mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u},$$

уравнения, описывающие движение частицы в волне, можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left( \frac{t}{\alpha} \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)' \mathbf{u} - \left( t \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)', \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon \left( \frac{t}{\alpha} \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)' \mathbf{v}. \quad (8)$$

Положим

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i, \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i, \quad \frac{kc}{\sigma} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i. \quad (9)$$

Подставляя ряды (8) и выражения для компонент скорости в уравнения движения (9), для определения первых трех коэффициентов получим следующие уравнения:

$$\frac{dx_0}{dt} = -1, \quad \frac{dz_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{A}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ [e^{z_0} + aV_1(z_0) + bV_2(z_0)] \cos x_0 + [aV_2(z_0) - bV_1(z_0)] \sin x_0 \} - (t\gamma_1)',$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{A}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ [e^{z_0} + V_1(z_0)] \cos x_0 + V_2(z_0) \sin x_0 \},$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{\alpha} \left( \{e^{2z_0} D_2 + 1/2 [a_1 V_3(z_0) + b_1 V_4(z_0) + \right. \\
&\quad \left. + a V_5(z_0) + (b+1) V_6(z_0)]\} \cos 2x_0 + \right. \\
+ \{ &-e^{2z_0} D_1 + 1/2 [a_1 V_4(z_0) - b_1 V_3(z_0) + a V_6(z_0) - (b+1) V_5(z_0)]\} \sin 2x_0 - (t\gamma_2)' + \\
&+ \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}}{\alpha} \left( \{A z_1 e^{z_0} + b(2az_1 - x_1) V_1(z_0) - [(a^2 - b^2) z_1 - ax_1] V_2(z_0)\} \cos x_0 + \right. \\
&+ \{ -A x_1 e^{z_0} + b(2az_1 - x_1) V_2(z_0) + [(a^2 - b^2) z_1 - ax_1] V_1(z_0)\} \sin x_0 \}, \\
\frac{dz_2}{dt} &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{\alpha} \left[ (e^{2z_0} D_1 + V_3(z_0) + V_5(z_0)) \cos 2x_0 + \right. \\
&\quad \left. + (e^{2z_0} D_2 + V_4(z_0) + V_6(z_0)) \sin 2x_0 \right] + \\
&+ \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}}{\alpha} \left\{ [A x_1 e^{z_0} + b z_1 V_1(z_0) + (x_1 - az_1) V_2(z_0)] \cos x_0 + \right. \\
&\quad \left. + [A z_1 e^{z_0} + b z_1 V_2(z_0) - (x_1 - az_1) V_1(z_0)] \sin x_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Разрешая последовательно данные уравнения, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_L - t, \quad z_0 = z_L, \quad \gamma_1 = 0, \\
x_1 &= \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}}{\Delta_5} \left\{ [-\beta A e^{z_L} - (\alpha b + \beta a) V_1(z_L) + (\alpha a - \beta b) V_2(z_L)] \cos(x_L - t) + \right. \\
&\quad \left. [-\alpha A e^{z_L} - (\alpha b + \beta a) V_2(z_L) - (\alpha a - \beta b) V_1(z_L)] \sin(x_L - t) \right\}, \\
z_1 &= \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}}{\Delta_5} \left[ (\alpha A e^{z_L} - \beta V_1(z_L) + \alpha V_2(z_L)) \cos(x_L - t) + \right. \\
&\quad \left. + (-\beta A e^{z_L} - \beta V_2(z_L) - \alpha V_1(z_L)) \sin(x_L - t) \right], \\
x_2 &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2\Delta_5} \left( \{ -(\alpha D_1 + \beta D_2) e^{2z_L} - (\beta a_1 + \alpha b_1) V_3(z_L)/2 + (\alpha a_1 - \beta b_1) V_4(z_L)/2 + \right. \\
&\quad + A e^{z_L} [(2\alpha\beta a + \alpha^2 b - \beta^2 b)/\Delta_5 - \beta/(2\nu_0) + (\alpha^2 - \beta^2)/\Delta_5] V_1(z_L) + \\
&\quad + A e^{z_L} [(2\alpha\beta b - \alpha^2 a + \beta^2 a)/\Delta_5 + \alpha/(2\nu_0) - 2\alpha\beta/\Delta_5] V_2(z_L) - \\
&\quad - [\alpha(b+1) + \beta a] V_5(z_L)/2 + [\alpha a - \beta(b+1)] V_6(z_L)/2 \} \cos(2x_L - t) + \\
&\quad + \{ (\beta D_1 - \alpha D_2) e^{2z_L} - (\beta a_1 + \alpha b_1) V_4(z_L) - (\alpha a_1 - \beta b_1) V_3(z_L) + \\
&\quad + A e^{z_L} [(2\alpha\beta a + \alpha^2 b - \beta^2 b)/\Delta_5 - \beta/(2\nu_0) + (\alpha^2 - \beta^2)/\Delta_5] V_2(z_L) - \\
&\quad - A e^{z_L} [(2\alpha\beta b - \alpha^2 a + \beta^2 a)/\Delta_5 + \alpha/(2\nu_0) - 2\alpha\beta/\Delta_5] V_1(z_L) - \\
&\quad - [\alpha(b+1) + \beta a] V_6(z_L)/2 - [\alpha a - \beta(b+1)] V_5(z_L)/2 \} \sin(2x_L - t) \}, \\
z_2 &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2\Delta_5} \left\{ [(\alpha D_2 - \beta D_1) e^{2z_L} + \alpha V_4(z_L) - \beta V_3(z_L) + \alpha V_6(z_L) - \beta V_5(z_L)] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \cos(2x_L - 2t) + [ -(\alpha D_1 + \beta D_2) e^{2z_L} - \alpha V_3(z_L) - \beta V_4(z_L) - \alpha V_5(z_L) - \beta V_6(z_L)] \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot \sin(2x_L - 2t) + Ae^{z_L} [aV_1(z_L) + (b+1)V_2(z_L) + A^2] + be^{bz_L} (B_1^2 + B_2^2)\},$$

$$\gamma_2 = \frac{1 - e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{4\beta\nu_0\Delta_5 t} [2\alpha\nu_0 A^2 e^{2z_L} + Ae^{z_L} (\alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha\nu_0) V_1(z_L) + 2\alpha Ae^{z_L} \cdot$$

$$(\nu_0 + b\nu_0 - \beta) V_2 + \alpha e^{2bz_L} (B_1^2 + B_1^2) (2a^2\nu_0 + 2\nu_0 - 3\beta),$$

где  $x_L, z_L$  — лагранжевы координаты.

Величина  $u_s = c - \sigma/k$  представляет собой переносную скорость вдоль горизонтальной оси. Ее приближенное выражение имеет вид

$$u_s = c \left(1 - \frac{\sigma}{ck}\right) = c \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \gamma_2}\right) \approx \varepsilon^2 c \gamma_2. \quad (10)$$

Для примера построены траектории движения жидких частиц при малом (Рис. 1) и большом (Рис. 2) значении коэффициента кинематической вязкости. Видно, что частицы вблизи поверхности движутся быстрее, чем частицы на глубине, что обусловлено наличием приповерхностного течения Стокса, которое характеризуется переносной скоростью (10). С увеличением вязкости амплитуда волновых возмущений и переносная скорость убывают быстрее. Кроме того, вблизи поверхности при большой вязкости траектории наклонены в верхней точке в сторону движения, что не наблюдается на заглублении. Это можно объяснить влиянием вязких касательных напряжений на свободной поверхности.

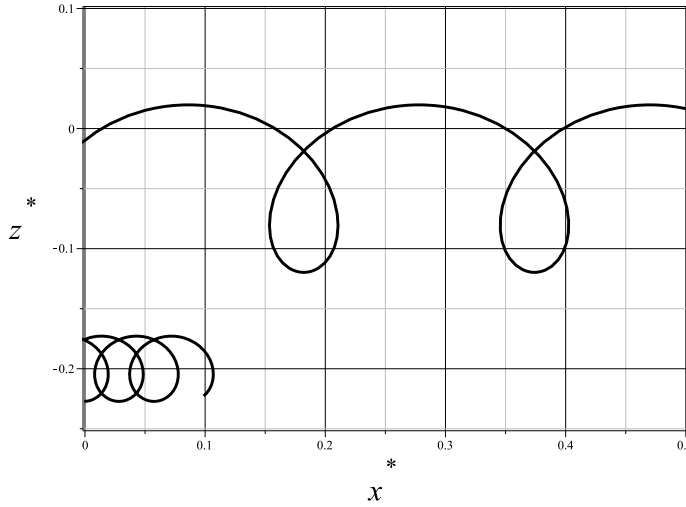


Рис. 1: Траектории частиц жидкости при  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

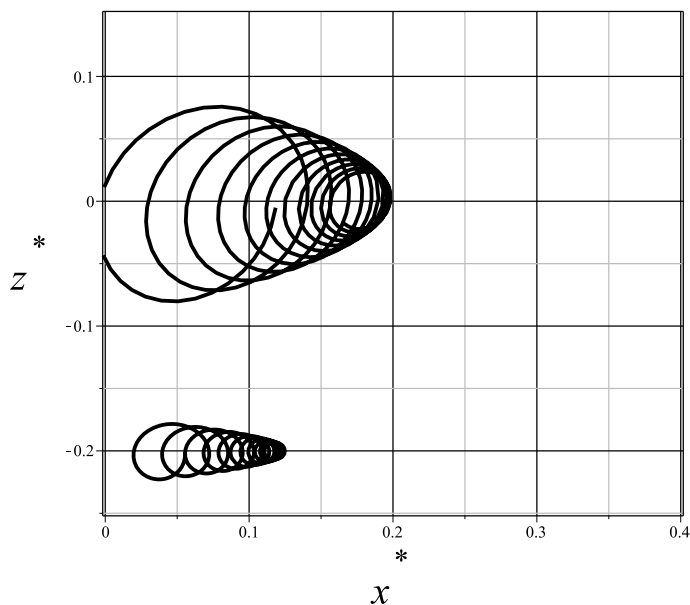


Рис. 2: Траектории частиц жидкости при  $\nu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

## Заключение

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов второго порядка по малому амплитудному параметру. Получены выражения для траекторий частиц жидкости, а также для скорости приповерхностного течения Стокса.

## Список литературы

- [1] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
- [2] Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1981. 196 с.
- [3] Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.
- [5] Баринов В.А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 2. С. 18–31.



- [6] Баринов В.А., Басинский К.Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 2. С. 9–16.

#### Библиографическая ссылка

Басинский К.Ю. Асимптотическое решение задачи о волнах на поверхности слоя вязкой жидкости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 15–24.

#### Сведения об авторах

1. **Басинский Константин Юрьевич**

доцент кафедры математического моделирования Тюменского государственного университета.

*Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Семакова, д. 10, ТГУ.*

*E-mail: kbasinsky@mail.ru.*

**THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF WAVES  
ON THE SURFACE OF THE LAYER OF VISCOUS FLUID**

**Basinsky Konstantin Yurjevich**

Associate Professor at Mathematical Modelling department,  
Tyumen State University

*Russia, 625003, Tyumen, 10 Semakova str., TSU. E-mail: kbasinsky@mail.ru*

---

*Received 17.06.2015, revised 20.06.2015.*

---

The article deals with the problem of nonlinear wave propagation on a free surface layer of a viscous incompressible fluid of infinite depth. The problem is solved by the first Stokes method with accuracy of second approximation. Expressions for trajectories of fluid particles as well as for the speed of the surface current were obtained. The influence of viscosity and depth on the shape of the trajectories of liquid particles and drive speed was analyzed.

**Keywords:** wave disturbances, viscosity, particle.

**Bibliographic citation**

Basinsky K.Yu. The asymptotic solution of the problem of waves on the surface of the layer of viscous fluid. *Vestnik TvgU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 15–24. (in Russian)