УДК 519.22, 517.521, 53.088

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК РИСКА ПРИ ВЕЙВЛЕТ-ВЕЙГЛЕТ И ВЕЙГЛЕТ-ВЕЙВЛЕТ РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИИ СИГНАЛА В МОДЕЛИ С КОРРЕЛИРОВАННЫМ ШУМОМ*

Ерошенко А.А.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 08.10.2014, после переработки 20.10.2014.

В работе рассматривается задача оценки функции после применения однородного линейного оператора в модели с коррелированным шумом. Исследуются асимптотические свойства оценок риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложений сигнала. Приводятся условия, при которых имеет место состоятельность несмещенной оценки риска.

Ключевые слова: вейвлеты, линейный однородный оператор, пороговая обработка, несмещенная оценка риска, коррелированный шум, состоятельность.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 103–114.

1. Введение

В данной работе рассматривается следующая модель наблюдаемых данных:

$$Y_i = (Kf)_i + z_i, \tag{1}$$

где i – номер отсчета измеряемого сигнала, f – искомая функция, z_i – коррелированный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием, K – однородный линейный оператор в $\mathbb{L}^2$ с показателем однородности $\beta > 0$ [1], то есть для любого x_0 и $a > 0$

$$K[f(a(x-x_0))] = a^{-\beta}(Kf)[a(x-x_0)].$$

Этим свойством обладает, например, оператор интегрирования, преобразования Абеля и некоторые другие виды операторов свертки [2].

Моделью (1) описываются такие прикладные задачи, в которых данные наблюдаются не напрямую и содержат шум, например, анализ телекоммуникационного трафика, физика плазмы, компьютерная томография. Пороговая обработка коэффициентов вейвлет-вейглет разложения наблюдаемых данных в таких задачах позволяет «очистить» целевую функцию от шума, наличие которого приводит к

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00515).

погрешностям. Свойства оценки таких погрешностей (риска) при различных условиях измерения сигнала исследовались в работах [1, 3–16]. В работах [15–16] рассматриваются модели со стационарным коррелированным шумом при использовании вейвлет-вейглет [17] и вейглет-вейвлет[18] разложений сигнала. Показано, что при определенных условиях оценки риска обладают свойствами асимптотической нормальности. Следствием полученных результатов является состоятельность оценок риска при указанных ограничениях. Однако, эти ограничения можно значительно ослабить.

В данной работе будет показано, что обе оценки риска при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложений сигнала в модели со стационарным коррелированным шумом обладают свойством состоятельности при более слабых ограничениях на измеряемый сигнал.

2. Вейвлет-вейглет разложение и восстановление функции

Пусть вейвлет-разложение функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеет вид:

$$f = \sum_{jk} < f, \psi_{jk} > \psi_{jk}, \tag{2}$$

где $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, а $\psi(t)$ – некоторая материнская вейвлет-функция (семейство $\{\psi_{jk}\}_{jk\in Z}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$). Индекс j в (2) называется масштабом, а индекс k – сдвигом. Функция ψ должна удовлетворять определенным требованиям, однако ее можно выбрать таким образом, чтобы она обладала некоторыми полезными свойствами, например, была дифференцируемой нужное число раз и имела заданное число M нулевых моментов [2], то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, \ldots, M-1.$$

В дальнейшем будут рассматриваться функции сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$ на конечном отрезке $[a, b]$, равномерно регулярные по Липшицу с некоторым параметром $\gamma > 0$. Для таких функций известно [19], что если вейвлет-функция M раз непрерывно дифференцируема ($M \geqslant \gamma$), имеет M нулевых моментов и достаточно быстро убывает на бесконечности, то есть существует такая константа $C_A > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|^{\gamma})\, |\psi(t)|\, dt \leqslant C_A,$$

то найдется такая константа $A > 0$, что

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle| \leqslant \frac{A}{2^{j(\gamma+1/2)}}\,. \tag{3}$$

На практике функции сигнала всегда заданы в дискретных отсчетах на конечном отрезке. Не ограничивая общности, будем считать, что это отрезок $[0, 1]$ и функция f задана в точках $i/2^J$ ($i = 1, \ldots, 2^J$): $f_i = f\left(i/2^J\right)$. Дискретное вейвлет-преобразование представляет собой умножение вектора значений функции f (обозначим его через $\overline{f}$) на ортогональную матрицу W, определяемую вейвлет-функцией ψ: $\overline{f}^W = W\overline{f}$ [19]. При этом дискретные вейвлет-коэффициенты связаны с непрерывными следующим образом: $f_{jk}^W \approx 2^{J/2}\langle f, \psi_{jk}\rangle$. Это приближение тем точнее, чем больше J. Мы не будем учитывать краевые эффекты, связанные с использованием вейвлет-разложения на конечном отрезке. Методы борьбы с такими эффектами обсуждаются, например, в [20].

Поскольку оператор K линеен и однороден, существуют такие функции (вейглеты [17]), что $[Kf, \xi_{jk}] =< f, \psi_{jk} >$, где вейглеты ξ_{jk} – это «вейвлетоподобные» функции, которые также представляют собой сдвиги и растяжения некоторой материнской функции ξ.

Далее, пусть $\xi_{jk} = \lambda_{jk}u_{jk}$ и $\lambda_{jk} = \left\|(K^*)^{-1}\psi_{jk}\right\|$. Для однородного оператора $(K^*)^{-1}$ легко показать, что $\lambda_{jk} = 2^{\beta j}\lambda_{00}$. При этом функция f представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k\in Z} \lambda_{jk}\langle Kf, u_{jk}\rangle\psi_{jk}.$$

Аналогично, по базису вейвлет-фукнций можно разложить $Kf \in L^2(\mathbb{R})$:

$$Kf = \sum_{j,k\in Z} \langle Kf, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk},$$

выбрать функцию ψ с нужным числом нулевым моментов, тогда

$$|\langle Kf, \psi_{jk}\rangle| \leqslant \frac{A}{2^{j(\gamma+1/2)}}. \tag{4}$$

Также существуют такие функции u_{jk}, что $\langle f, u_{jk}\rangle = \langle Kf, \psi_{jk}\rangle$. Заметим, что если преобразование K однородно с показателем β, то K^{-1} однородно с показателем $-\beta$. Пусть $\lambda_{jk} = \left\|K^{-1}\psi_{jk}\right\|$, тогда можно показать, что $\lambda_{jk} = 2^{\beta j}\lambda_{00}$. А функция f представляется в виде ряда [18]

$$f = \sum_{j,k\in Z} \lambda_{jk}\langle Kf, \psi_{jk}\rangle u_{jk},$$

где $u_{jk} = K^{-1}\psi_{jk}/\lambda_{jk}$ (по аналогии с предыдущим методом функции u_{jk} называются «вейглетами»).

Последовательность $\{u_{jk}\}$ в обоих разложениях не образует ортонормированную систему, однако, если выполнены некоторые условия гладкости на $K^*\psi$, $K^{-1}\psi$ и $(K^*)^{-1}\psi$ [21], то последовательность $\{u_{jk}\}$ образует устойчивый базис.

3. Модели данных

Пусть $\{z_i, i \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и ковариационной последовательностью $r_k = \mathbf{cov}(z_i, z_{i+k})$. Модель выборки длины $n = 2^J$ со стационарными ошибками имеет вид:

$$Y_i = Kf(i/n) + z_i,\ i = 1, \ldots, 2^J. \tag{5}$$

Далее, повторяя рассуждения, описанные в работах [15-16]: определяем наблюдаемый «суммарный» процесс, переходим к предельному процессу, используя лемму Такку [21], применяем вейглет- или вейвлет-преобразование и аппроксимируем его, соответственно, дискретным вейглет- или вейвлет-преобразованием, и получаем модели дискретных вейглет- или вейвлет-коэффициентов.

Для вейвлет-вейглет преобразования:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{J(1-\alpha)/2} w_{jk}, \tag{6}$$

где $\mu_{jk} \approx 2^{J/2}[KF, \xi_{jk}]$ и $w_{jk} = [W, \xi_{jk}] = \int \xi_{jk} d\mathbf{B}_H$. Шумовые переменные w_{jk} имеют нормальное распределение с нулевым средним и не являются независимыми. Дисперсии коэффициентов X_{jk} не зависят от k и равны [14]

$$\sigma_j^2 = C_{\alpha\beta} 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j}, \tag{7}$$

где $C_{\alpha\beta}$ — константа, зависящая от параметров α и β.

Замечание 1. Далее будем рассматривать вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложение на основе вейвлетов Мейера [19], удовлетворяющих перечисленным выше требованиям. Для вейвлетов Мейера и любого $M_0 > 0$ справедливо: $|\widehat{\psi}(w)| \leqslant C'_{M_0}|w|^{M_0}\mathbf{1}_{w\in supp(\hat{\psi})}$ [22, 23]. Также потребуем выполнения аналогичного неравенства для вейглет-функций: $|\hat{u}(w)| \leqslant C_{M_1}|w|^{M_1}\mathbf{1}_{w\in supp(\hat{u})}$ с некоторой константой $M_1 > 0$. Данное неравенство справедливо для многих линейных однородных операторов, например, для оператора Рисса, оператора интегрирования, преобразования Абеля и преобразования Гильберта. Помимо этого, выбирая соответствующие вейвлеты Мейера, можно добиться, чтобы функция $\hat{u}(w)\,|\omega|$ была дифференцируема нужное число раз.

Если $M_1 > 1-\alpha$, $M_1 > \beta$ и функция $\overline{\hat{u}(w)}|z|^{M_1-(1-\alpha)}$ была M раз дифференцируема (см. замечание), тогда для ковариации $\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})$ при $j \geqslant i$ и $\Delta = j-i$ справедливо [15]:

$$|\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| \leqslant \begin{cases} C 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\Delta M_1} \frac{1}{|k2^{-\Delta}-l|^M}, & |k2^{-\Delta}-l| > 1; \\ C 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\Delta M_1}, & |k2^{-\Delta}-l| \leqslant 1, \end{cases} \tag{8}$$

где C – некоторая положительная константа.

Модель вейглет-вейвлет коэффициентов имеет вид:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{\frac{(J-j)(1-\alpha)}{2}} z_{jk}, \tag{9}$$

где $\mu_{jk} \approx 2^{J/2}\langle Kf, \psi_{jk}\rangle$ и $z_{jk} = 2^{\frac{j(1-\alpha)}{2}} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H$. Шумовые переменные z_{jk} также имеют стандартное нормальное распределение, но не являются независимыми.

Повторяя рассуждения из работы [16], можно получить следующую оценку:

$$|\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| \leqslant \begin{cases} C_{Me} 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0} \frac{1}{|k2^{-\Delta}-l|^M}, & |k2^{-\Delta}-l| > 1; \\ C_{Me} 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0}, & |k2^{-\Delta}-l| \leqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

где C_{Me} – некоторая положительная константа.

4. Пороговая обработка и оценка риска

Смысл пороговой обработки коэффициентов вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложений заключается в удалении достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. Мы будем рассматривать так называемую мягкую пороговую обработку с порогом T_j, зависящим от уровня j. К каждому коэффициенту применяется функция $\rho_{T_j}(x) = \mathbf{sgn}(x)\left(|x| - T_j\right)_+$, то есть при такой пороговой обработке коэффициенты, которые по модулю меньше порога T_j, обнуляются, а абсолютные величины остальных коэффициентов уменьшаются на величину порога. Погрешность (или риск) мягкой пороговой обработки определяется следующим образом в случае вейвлет-вейглет преобразования:

$$R_J^{[W]}(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}\left(\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk})\right)^2. \tag{11}$$

В [3–4] предложено использовать порог $T_j = \sqrt{2\ln 2^j}\sigma_j$, названный «универсальным». В дальнейшем будет использоваться именно такой вид порога. В выражении (11) присутствуют неизвестные величины μ_{jk}, поэтому вычислить значение $R_J(f)$ нельзя. Однако его можно оценить. В качестве оценки риска используется следующая величина [1]:

$$\widehat{R}_J^{[W]}(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], \tag{12}$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2)\mathbb{1}_{\{|x| \leqslant T^2\}} + (\sigma^2 + T^2)\mathbb{1}_{\{|x| > T^2\}}$.

Для вейглет-вейвлет преобразования риск имеет вид:

$$R_J^{[V]}(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 \mathbb{E}\left(\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk})\right)^2, \tag{13}$$

а оценка риска:

$$\widehat{R}_J^{[V]}(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]. \tag{14}$$

Величины $\widehat{R}_J^{[W]}(f)$ и $\widehat{R}_J^{[V]}(f)$ являются несмещенными оценками для (11) и (13)[16]. В работах [3–12] исследовались асимптотические свойства этих оценок (12) и (14) в модели с независимым шумом. Было показано, что при определенных условиях гладкости они являются состоятельными и асимптотически нормальными. Далее будет исследована состоятельность оценок (12) и (14) в моделях (6) и (9), соответственно.

5. Дисперсия риска

Введем обозначение для последовательностей: $a_J \simeq b_j$, если $\lim\limits_{J\to\infty} \frac{a_J}{b_J} = 1$.

Оценки риска (12) и (14) для некоторой константы $p'' \in (0,1)$: $p''J \in \mathbb{Z}$ можно разбить на две суммы:

$$\widehat{R}_J^{[W]}(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \equiv \widehat{R}_1^{[W]} + \widehat{R}_2^{[W]},$$

и

$$\widehat{R}_J^{[V]}(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \equiv \widehat{R}_1^{[V]} + \widehat{R}_2^{[V]}.$$

При определенных условиях на p'' можно добиться убывания коэффициентов вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложения в слагаемых $\widehat{R}_2^{[W]}$ и $\widehat{R}_2^{[V]}$. Далее в леммах 1 и 2 приведены оценки сверху для дисперсий $\mathsf{D}\,\widehat{R}_2^{[W]}$ и $\mathsf{D}\,\widehat{R}_2^{[V]}$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha + 2\beta > 0$ и $\gamma > 0$, тогда для модели (6), полученной в результате вейвлет-вейглет преобразования исходного сигнала, справидлива оценка дисперсии риска:*

$$\mathsf{D}\,\widehat{R}_2^{[W]} \leqslant \begin{cases} \tilde{C} 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C} J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \\ \tilde{C} 2^{2J((1-\alpha) - \frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5; \end{cases} \tag{15}$$

где константа $\tilde{C}$ зависит от α и β, но не зависит от функции сигнала f.

Доказательство. Рассморим модель вейвлет-вейглет коэффициентов (6). Из условий леммы можем выбрать p'' такое, что $p'' > (2\gamma+1)^{-1}$ и $p''J$ – целое число. Тогда в силу (3) $\mu_{jk} \to 0$ для всех $j : p''J \leqslant j < J$ при $J \to \infty$. Далее,

$$\mathsf{D}\,\widehat{R}_J(f) = \sum_{j=p''J}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathsf{D}\,F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] +$$

$$+ \sum_{i=p''J}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}(F[X_{il}^2, T_i, \sigma_i]^2, F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]^2). \tag{16}$$

Учитывая, что $\alpha + 2\beta > 0$, для первой суммы имеем:

$$\sum_{i=p''J}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \mathsf{D}\,X_{il}^2 = \sum_{i=p''J}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} 2\sigma_i^2(\sigma_i^2 + \mu_{il}^2) \simeq C' \sum_{i=p''J}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} 2\sigma_i^4 =$$

$$= C'_{\alpha\beta} \sum_{i=p''J}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} 2 \frac{2^{2J(1-\alpha)}}{2^{2i(1-\alpha)}} 2^{4i\beta} = C'_{\alpha\beta} 2^{2J(1-\alpha)} \sum_{i=p''J}^{J-1} 2^{i(-1+2\alpha+4\beta)} =$$

$$= \begin{cases} \tilde{C}_0 2^{J(1+4\beta)} \frac{2^{2(\alpha+2\beta)}}{2^{2(\alpha+2\beta)}-2}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C}_0 (J - p''J - 1) 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \simeq \\ \tilde{C}_0 2^{2J(1-\alpha)} \frac{2^{p''J(2(\alpha+2\beta)-1)}2}{(2-2^{2(\alpha+2\beta)})}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} \tilde{C}_1 2^{J(1+4\beta)}, & \alpha+2\beta > 0.5; \\ \tilde{C}_1 J 2^{2J(1-\alpha)}, & \alpha+2\beta = 0.5; \\ \tilde{C}_1 2^{2J((1-\alpha)-\frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \alpha+2\beta < 0.5; \end{cases} \tag{17}$$

где C', $C_{\alpha\beta}$, $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$ – положительные константы.

Рассмотрим теперь вторую сумму в (16). Известно, что если вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение, то

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y). \tag{18}$$

Аналогично работе [15] из (8) и (18), получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{i=p''J}^{J-1}\sum_{l=0}^{2^i-1}\sum_{j=p''J+1}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\mathbf{cov}^2(X_{il}, X_{jk}) \leqslant \sum_{i=p''J+1}^{J-1} H_1 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{i(1+4\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} H_2 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha+2\beta > 0.5; \\ H_2 J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha+2\beta = 0.5; \\ H_2 2^{2J((1-\alpha)-\frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha+2\beta < 0.5; \end{cases} \tag{19}$$

где H_1, H_2 – положительные константы, зависящие от α и β. Аналогично, с учетом (3)

$$\sum_{i=p''J+1}^{J-1}\sum_{l=0}^{2^i-1}\sum_{j=p''J+1}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\mu_{il}\mu_{jk}\mathbf{cov}(X_{il}, X_{jk}) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} H_{\alpha\beta} 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha+2\beta > 0.5; \\ H_{\alpha\beta} J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha+2\beta = 0.5; \\ H_{\alpha\beta} 2^{2J((1-\alpha)-\frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha+2\beta < 0.5; \end{cases} \tag{20}$$

где $H_{\alpha\beta}$ – константа, зависящая от α и β. Объединяя (17), (19) и (20), получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Пусть $\alpha + 2\beta > 0$ и $\gamma > 0$, тогда для модели (9), полученной в результате вейглет-вейвлет преобразования исходного сигнала, справедлива оценка дисперсии риска:*

$$\mathsf{D}\,\widehat{R}_2^{[V]} \leqslant \begin{cases} \tilde{C}' 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha+2\beta > 0.5; \\ \tilde{C}' J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha+2\beta = 0.5; \\ \tilde{C}' 2^{2J((1-\alpha)-\frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha+2\beta < 0.5; \end{cases} \tag{21}$$

где константа $\tilde{C}$ зависит от α и β, но не зависит от функции сигнала f.

Доказательство. Как в лемме 1 можем выбрать p'' такое, что $p'' > (2\gamma+1)^{-1}$ и $p''J$ – целое число, чтобы $\mu_{jk} \to 0$ для всех $j\colon p''J \leqslant j < J$ при $J \to \infty$.

По аналогии с леммой 1, учитывая оценку ковариации (10) и убывание коэффициентов (4) для модели (9) имеем такие же как в случае вейвлет-вейглет коэффициентов (с точностью до константы) оценки для суммы дисперсии (17) и сумм ковариаций (19)–(20). А значит, лемма доказана. □

6. Основные теоремы

Докажем теоремы о состоятельности оценки риска, справедливые при более слабых ограничениях на α и γ, чем те, которые используются для доказательств асимптотической нормальности в [15] и [16].

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta$, *функция* f *регулярна с параметром* $\gamma > 0$. *Тогда при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет разложения с «универсальным» порогом и* $b > \max(1 - \alpha + \frac{\alpha+2\beta}{2\gamma+1}, (2\beta + 0.5)\mathbb{1}_{\{\alpha+2\beta\geqslant 0.5\}})$ *выполняется*

$$\frac{\widehat{R}_J^{[W]}(f) - R_J^{[W]}(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad J \to \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Условия теоремы позволяют выбрать p'' таким, что $(2\gamma+1)^{-1} < p'' < \min(\frac{b+\alpha-1}{\alpha+2\beta}, 1)$. Разобьем выражение в числителе (22) на две суммы:

$$\widehat{R}_J^{[W]}(f) - R_J^{[W]}(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) +$$

$$+ \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) \equiv R_1^{[W]} + R_2^{[W]}.$$

Так как существует такая константа $C_F > 0$, что $F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \leqslant C_F j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j}$, для первой суммы имеем

$$\sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \leqslant C_F \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j} \leqslant C_F' J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')} \tag{23}$$

с некоторой константой $C_F' > 0$. Получаем, что $|R_1^{[W]}| \leqslant C_1 J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')}$ с некоторой константой $C_1 > 0$. При этом $1 - \alpha + (\alpha + 2\beta)p'' < b$ в силу выбора p''. Следовательно, $R_1^{[W]} 2^{-bJ} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$. Из леммы 1, для некоторой константы $\tilde{C}$

$$\mathsf{D}\, R_2^{[W]} \leqslant \begin{cases} \tilde{C} 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C} J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \\ \tilde{C} 2^{2J((1-\alpha)-\frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5. \end{cases}$$

Используя неравенство Чебышева, имеем при любом $\delta > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\frac{|R_2^{[W]}|}{2^{bJ}} \geqslant \delta\Big) \leqslant \frac{\mathsf{D}\, \widehat{R}_J^{[W]}(f)}{2^{2bJ}\delta^2}. \tag{24}$$

При $\alpha + 2\beta \geqslant 0.5$ правая часть (24) стремится к нулю при $b > 2\beta + 0.5$. А при $\alpha+2\beta < 0.5$ правая часть (24) стремится к нулю при $b > (1-\alpha) - \frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta))$, а учитывая, что $p'' > (2\gamma + 1)^{-1}$, получаем, что $b > (1 - \alpha) - \frac{1-2(\alpha+2\beta)}{2(2\gamma+1)}$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta$, *функция* f *регулярна с параметром* $\gamma > 0$. *Тогда при пороговой обработке коэффициентов вейглет-вейвлет разложения с «универсальным» порогом и* $b > \max(1 - \alpha + \frac{\alpha+2\beta}{2\gamma+1}, (2\beta + 0.5)\mathbb{1}_{\{\alpha+2\beta\geqslant 0.5\}})$ *выполняется*

$$\frac{\widehat{R}_J^{[V]}(f) - R_J^{[V]}(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad J \to \infty. \tag{25}$$

Доказательство. Также как в теореме 1 можем выбрать p'' таким, что $(2\gamma+1)^{-1} < p'' < \min(\frac{b+\alpha-1}{\alpha+2\beta}, 1)$. Разобьем выражение в числителе (25) на две суммы:

$$\widehat{R}_J^{[V]}(f) - R_J(f) = \sum_{j=0}^{p''J}\sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])+$$

$$+ \sum_{j=p''J+1}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) \equiv R_1^{[V]} + R_2^{[V]}.$$

Из леммы 2 следует, что оценка для $R_2^{[V]}$ будет равна оценке, которая используется в теореме 1, с точностью до константы. Тогда, следуя теореме 1, применим неравенство Чебышева и получим утверждение теоремы. □

Список литературы

[1] Donoho D., Johnstone I.M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // Journal of the American Statistical Association. 1995. Vol. 90. Pp. 1200–1224.

[2] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 464 с.

[3] Donoho D., Johnstone I.M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // Biometrika. 1994. Vol. 81, №. 3. Pp. 425–455.

[4] Donoho D.L., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., Picard D. Wavelet shrinkage: asymptopia? // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). 1995. Vol. 57, № 2. Pp. 301–369.

[5] Marron J.S., Adak S., Johnstone I.M., Neumann M.H., Patil P. Exact risk analysis of wavelet regression // Journal of Computational and Graphical Statistics. 1998. Vol. 7. Pp. 278–309.

[6] Antoniadis A., Fan J. Regularization of wavelet approximations // Journal of the American Statistical Association. 2001. Vol. 96, № 455. Pp. 939–967.

[7] Маркин А.В. Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения. 2009. Т. 3, № 4. С. 57–63.

[8] Маркин А.В., Шестаков О.В. О состоятельности оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2010. № 1. С. 26–34.

[9] Шестаков О.В. Аппроксимация распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов нормальным распределением при использовании выборочной дисперсии // Информатика и ее применения. 2010. Т. 4, № 4. С. 72–79.

[10] Шестаков О.В. О точности приближения распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала нормальным законом при неизвестном уровне шума // Системы и средства информатики. 2012. Т. 22, № 1. С. 142–152.

[11] Шестаков О.В. Асимптотическая нормальность оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при выборе адаптивного порога // Доклады РАН. 2012. Т. 445, № 5. С. 513–515.

[12] Шестаков О.В. Зависимость предельного распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала от вида оценки дисперсии шума при выборе адаптивного порога // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2012. Т. 6, № 1. С. 46–51.

[13] Шестаков О.В. Центральная предельная теорема для функции обобщенной кросс-валидации при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения. 2013. Т. 7, № 2. С. 40–49.

[14] Ерошенко А.А., Шестаков О.В. Асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в модели с коррелированным шумом // Информатика и ее применения. 2014. Т. 8, № 1. С. 36–44.

[15] Ерошенко А.А., Шестаков О.В. Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет-вейглет-разложении функции сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2014. № 3. С. 23–30.

[16] Ерошенко А.А., Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Предельное распределение оценки риска метода вейглет-вейвлет-разложения сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 1. С. 12–18.

[17] Donoho D. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Applied and Computational Harmonic Analysis. 1995. Vol. 2. Pp. 101–126.

[18] Abramovich F., Silverman B.W. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems // Biometrika. 1998. Vol. 85, № 1. Pp. 115–129.

[19] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, 1999.

[20] Boggess A., Narkowich F. A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. Prentice Hall, 2001.

[21] Taqqu M.S. Weak convergence to fractional brownian motion and to the rosenblatt process // Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1975. Vol. 31. Pp. 287–302.

[22] Johnstone I.M., Silverman B.W. Wavelet threshold estimates for data with correlated noise // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). 1997. Vol. 59. Pp. 319–351.

[23] Johnstone I.M. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: adaptivity results // Statistica Sinica. 1999. Vol. 9, № 1. Pp. 51–83.

[24] Lee N. Wavelet-vaguelette decompositions and homogenous equations. PhD dissertation. Purdue University, 1997.

Библиографическая ссылка

Ерошенко А.А. Состоятельность оценок риска при вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложениях функции сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 103–114.

Сведения об авторах

1. **Ерошенко Александр Андреевич**
аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: aeroshik@gmail.com.

CONSISTENCY OF RISK ESTIMATES FOR WAVELET-VAGUELETTE AND VAGUELETTE-WAVELET DECOMPOSITIONS OF SIGNAL FUNCTION IN THE MODEL OF DATA WITH CORRELATED NOISE

Eroshenko Alexandr Andreyevich
PhD student of Computational Mathematics and Cybernetics faculty,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: aeroshik@gmail.com

Received 08.10.2014, revised 20.10.2014.

In the present paper we consider the problem of estimating function after applying linear homogeneous operator in the model of data with correlated noise. We study asymptotical properties of risk estimates of thresholding methods for wavelet-vaguelette and vaguelette- wavelet decompositions of a signal. We give the conditions under which the unbiased risk estimates are consistent.

Keywords: wavelets, linear homogeneous operator, thresholding, unbiased risk estimate, correlated noise, consistency.

Bibliographic citation

Eroshenko A.A. Consistency of risk estimates for wavelet-vaguelette and vaguelette-wavelet decompositions of signal function in the model of data with correlated noise. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 103–114. (in Russian)