УДК 517.956.35

ПРИМЕНЕНИЕ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Бозиев О.Л.
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского Научного Центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 27.11.2014, после переработки 20.12.2014.

Для нахождения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных производится их редукция к нагруженным уравнениям. Получены формулы общего члена последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, к которым редуцируются исходные нелинейные уравнения.

Ключевые слова: нагруженные уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения со степенной нелинейностью, приближенные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 127–136.

Введение

К нагруженным дифференциальным уравнениям в частных производных, то есть уравнениям, содержащим, в частности, интеграл от искомого решения или его производных, и соответствующим им начально-краевым задачам приводит исследование различных процессов и явлений. К ним относятся, например, задачи для параболического уравнения вида

$$u_t - a\left(\int\limits_0^l u_x^2 dx\right)\Delta u = 0,$$

возникающие при изучении проникновения электромагнитного поля в вещество, коэффициент электропроводности которого зависит от температуры [1-2] и для некоторых обобщений этого уравнения [3, с. 220], задачи для гиперболического уравнения Кирхгофа вида

$$u_{tt} - a\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)\Delta u = f(x,t)$$

и его обобщений [4-6]. В теории оптимального управления встречаются уравнения вида

$$u_{tt} - \Delta u + \left(\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^p \, dx \right) u_t = 0, p = const > 0$$

с соответствующими условиями [7-8]. Нагруженное эллиптическое уравнение вида

$$-\Delta u - \left(\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 \, dx \right)^p u = f, p = const > 0$$

рассматривается в [9, с. 322].

Согласно [10] заданное в $n-$мерной области Ω евклидова пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дифференциальное уравнение $Lu = f(x)$, называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения $u = u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности меньше n.

Во многих случаях нагруженными дифференциальными уравнениями можно аппроксимировать нелинейные дифференциальные уравнения. Это позволяет находить с приемлемой точностью приближенные решения начально-краевых задач для нелинейных уравнений путем решения этих же задач для соответствующих нагруженных уравнений. В данной работе такой подход, называемый методом редукции к нагруженным уравнениям, применяется для решения *модельных нелинейных уравнений параболического и гиперболического типа.* В результате такой редукции с помощью некоторого рекуррентного соотношения получены аналитические выражения для построения последовательностей приближенных решений нагруженных уравнений, которые можно принять за приближенные решения исходных нелинейных уравнений.

1. Постановка задачи и основные соотношения

Для частных и обыкновенных производных по t будем использовать обозначения:

$$\partial_t^{(\lambda)} u(x,t) = \frac{\partial^\lambda u}{\partial t^\lambda}, \ f^{(\lambda)}(t) = \frac{d^\lambda f}{dt^\lambda}, \ \lambda = 1, 2.$$

Пусть в области $Q = \{(x,\, t)\colon 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ задано уравнение

$$Lu + u^p = 0, \tag{1}$$

где натуральное $p > 1$, $u = u(x,t)$,

$$Lu \equiv \partial_t^{(\lambda)} u - u_{xx} - u, \ \lambda = 1, 2,$$

– линейный дифференциальный оператор второго порядка параболического или гиперболического типа при $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$, соответственно. Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t) \in C^{2,\lambda}(\bar{Q})$, $\lambda = 1{,}2$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Q, а также начальному условию

$$u(x,0) = \ \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \ \varphi(x) \in C^1[0,l] \tag{2}$$

для параболического и условиям

$$u(x,0) = \ \varphi_1(x), u_t(x,0) = \ \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^1[0,l](2\prime)$$

для гиперболического уравнения. В обоих случаях рассматриваются только граничные условия вида

$$(0,t) = \psi_1(t),\ (l,t) = \psi_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ \psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1[0,T]. \tag{3}$$

Процесс нахождения приближенного решения задачи (1), (2), (3) или (1), (2'), (3) состоит в последовательной аппроксимации уравнения (1) нагруженными дифференциальными уравнениями. При этом нулевое приближение $u^{(0)}(x,t)$ используется для запуска следующего итерационного процесса.

Полагая $k = 1$ решить при соответствующих начальных и граничных условиях уравнение (1), записанное в виде

$$Lu^{(k)} = -(u^{(k-1)})^p. \tag{4}$$

Подставить найденную функцию $u^{(k)}(x,t)$ в правую часть итерационного уравнения (4) при $k = k + 1$ и найти очередное «уточненное» решение $u^{(k+1)}(x,t)$.

Процесс завершить при реализации достаточного для достижения заданной точности количества итераций.

Для нахождения функции $u^{(0)}(x,t)$, необходимой для начала итерационного процесса, заменим уравнение (1) аппроксимирующим нагруженным уравнением

$$Lu = -\delta^p(t), \tag{5}$$

в котором $\delta(t)$ – среднее значение функции $u(x,\ t)$ на отрезке $[0,\ l]$:

$$\delta(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,t)dx. \tag{6}$$

При этом нагруженное дифференциальное уравнение (5) принято называть аппроксимирующим для уравнения (1), а функцию $u(x,\ t)$ – приближенным решением задачи (1), (2), (3) ((1), (2$\prime$), (3)), если она является точным или приближенным решением аппроксимирующей задачи (5), (2), (3) ((5), (2'), (3)) [11].

2. Нахождение нулевого приближения

Перепишем уравнение (5) в виде

$$u_{xx}(x,t) = \partial_t^{(\lambda)} u - u(x,t) + \delta^p(t),\ \lambda = 1, 2, \tag{7}$$

после чего проинтегрируем его по x:

$$u_x(x,t) = \int\limits_0^x \partial_t^{(\lambda)} u(s,t)ds - \int\limits_0^x u(s,t)ds + x\delta^p(t) + u_x(0,t).$$

В полученном равенстве устремим верхнюю границу интегралов к l и воспользуемся обозначением (6), тогда последнее равенство примет вид

$$u_x(x,t) = l\left(\delta^{(\lambda)}(t) - \delta(t)\right) + x\delta^p(t) + u_x(0,t),\ \lambda = 1,2.$$

Его интегрирование по x дает

$$u(x,t) = lx\left(\delta^{(\lambda)}(t) - \delta(t)\right) + \frac{x^2}{2}\delta^p(t) + xu_x(0,t) + u(0,t).$$

Для нахождения функций $u(0,\, t)$ и $u_x(0,\, t)$ воспользуемся граничными условиями (3), в результате чего получим соотношение, не содержащее $\delta_t^{(\lambda)}(t)$:

$$u(x,t) = \frac{x}{2}(x-l)\delta^p(t) + \frac{x}{l}(\psi_2(t) - \psi_1(t)) + \psi_1(t).$$

Проинтегрируем последнее уравнение на отрезке $[0,\, l]$ с учетом (6), что приводит к уравнению относительно функции $\delta(t)$:

$$\delta^p(t) + \frac{12}{l^2}\delta(t) - \frac{6}{l^2}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) = 0. \tag{8}$$

Функция $\delta(t)$, являющаяся корнем (8), подставленная в правую часть (5), приводит к линейной задаче (5), (2) (или (2')), (3). Найденную в результате ее решения функцию $u^{(0)}(x,\, t)$ примем за нулевое приближение в итерационном процессе (4).

Применим описанную схему к некоторым модельным уравнениям.

3. Уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова (КПП)

Параболическое уравнение КПП

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sum_{i=1}^{p} a_i u^i(x,t)$$

моделирует процессы различной природы. Некоторые конкретные значения p и коэффициентов под знаком суммы приводят правую часть уравнения к виду, соответствующему некоторым известным соотношениям [12]:

- $\alpha(u-u^2)$, $\alpha = const$ – уравнение Фишера, описывающее распространение популяций, перенос тепла и массы;
- $u - u^3$ – уравнение Ньюэлла-Уайтхеда, используется для анализа конвекции Релея-Бернара;
- $-\alpha u + (1+\alpha)u^2 - u^3$, $0<\alpha<1$ – уравнение Зельдовича, возникающее в теории горения;
- $\alpha u \pm \beta u^3 - \gamma u^5$, α, β, $\gamma = const$ – уравнение Гинзбурга-Ландау, описывающее поведение системы около точки бифуркации.

Пусть для уравнения КПП, записанного в виде

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - u(x,t) + u^p(x,t) = 0, \tag{9}$$

рассматривается задача (2), (3). Итерационный процесс (4) в данном случае имеет вид

$$u_t^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) - u^{(k)}(x,t) = -\left(u^{(k-1)}(x,t)\right)^p, \; k = 1, 2.... \tag{10}$$

С помощью (10) построим последовательность приближенных решений уравнения (9) при однородных начальных и граничных условиях

$$u(x,0) = 0, \; (0,t) = (l,t) = 0. \tag{11}$$

Найдем нулевое приближение $u^{(0)}(x,\, t)$. С учетом (11) из (8) получаем уравнение

$$\delta^p + 12\delta/l^2 = 0,$$

у которого при четных p существует действительный ненулевой корень

$$\delta = \left(-12/l^2\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{12}$$

Его подстановка в (5) приводит к линейному неоднородному параболическому уравнению, решение которого при условиях (11) определяется с помощью функции Грина и задается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau. \tag{13}$$

Здесь $G(x{,}\xi{,}t)$ – функция Грина для параболического уравнения, а $\Phi(x{,}t)$ – правая часть уравнения (4). В данном случае $\Phi(x{,}t) \; = -\delta^p \; = const$, тогда вычисление двойного интеграла в (13) дает нулевое приближение в итерационном процессе поиска решения:

$$u^{(0)}(x,t) = -\delta^p \frac{2l^2}{\pi^3} e^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}\right) \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

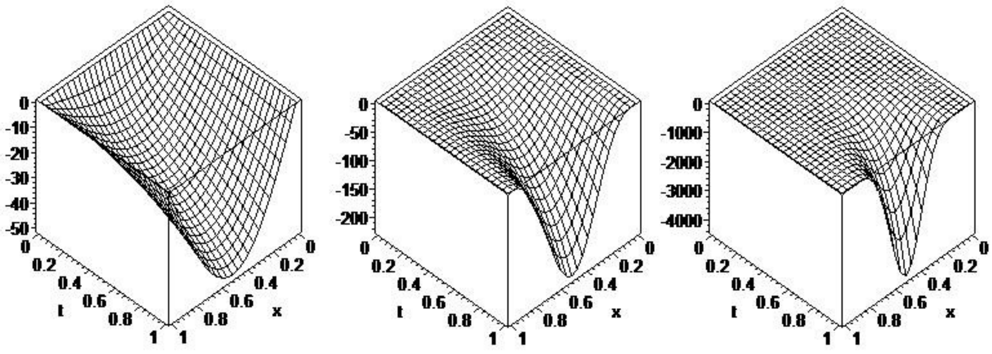
На следующих итерациях будем иметь $\Phi(\xi,\, \tau) \; = - \, u^{(k-1)}(\xi,\tau)$. Таким образом, процесс решения поставленной задачи сводится к определению очередного приближения по формуле

$$u^{(k)}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left(-u^{(k-1)}(\xi,\tau)\right)^p G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau, \; k = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

Пример 1. Для удобства вычислений ограничимся первым слагаемым в функции Грина. Пусть $p = 2$, тогда $\delta \; = -12/l^2$. Последовательно применяя (14), получим формулу для нахождения последовательных приближений решения поставленной задачи:

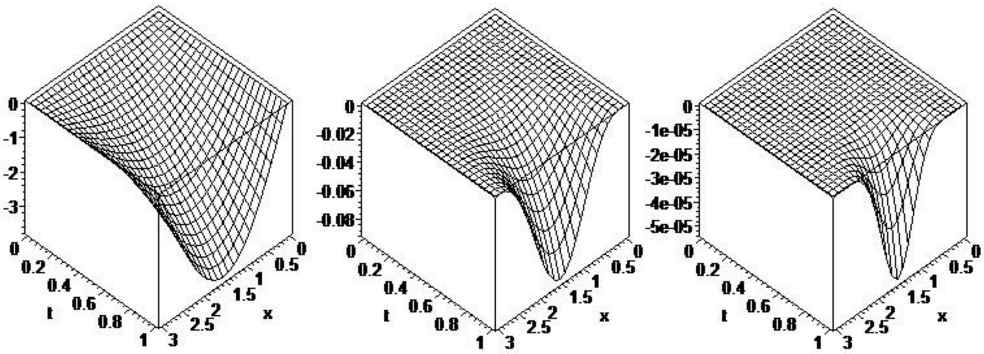
$$u^{(k)}(x,t) = -(2\delta)^{2^{k+1}} l^2 \left(\pi^{-3}\left(e^t - e^{\left(1-\frac{\pi^2}{l^2}t\right)}\right)\sin\frac{\pi x}{l}\right)^{2^{k+1}-1}, \; k = 0, 1, 2, ... \tag{15}$$

Данная формула позволяет последовательно аппроксимировать решение задачи (9), (11) при $p = 2$ функциями $u^{(k)}(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots$, каждая последующая из которых «уточняет» предыдущую. Ниже представлены графические компьютерные модели этих функций при $k = 0, 1, 2$, когда $l = 1$ (Рис. 1) и $l = 3$ (Рис. 2).



$u^{(0)}(x,\, t)$ $\qquad$ $u^{(1)}(x,\, t)$ $\qquad$ $u^{(2)}(x,\, t)$

Рис. 1: Графики функций $u^{(k)}(x,t)$, $k = 0, 1, 2$, при $l = 1, T = 1$



$u^{(0)}(x,\, t)$ $\qquad$ $u^{(1)}(x,\, t)$ $\qquad$ $u^{(2)}(x,\, t)$

Рис. 2: Графики функций $u^{(k)}(x,t)$, $k = 0, 1, 2$, при $l = 3$, $T = 1$

Отсюда, также как из результатов вычислений значений функций $u^{(k)}(x,t)$ при различных l, T и k, следует предположение, что при достаточно малых t, тем больших, чем больше l и k, имеет место сходимость в классическом смысле последовательности приближенных решений $u^{(k)}(x,t)$, $k \to \infty$, полученных по формуле (15), к (тривиальному) решению задачи (9), (11).

4. Уравнение Клейна – Гордона

Данное гиперболическое уравнение является обобщением волнового уравнения и имеет вид

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u(x,t) + u^p(x,t) = 0. \tag{16}$$

Оно подходит для описания безмассовых скалярных и векторных полей, применимо к описанию скалярных массивных полей, а также используется для описания быстро движущихся частиц, имеющих массу покоя.

Найдем приближенное решение (16) при однородных условиях (2'), (3)

$$u(x,0) = u_t(x,0) \;=\; 0,\; (0,t) = (l,t) = 0. \tag{17}$$

В этом случае δ также определяется равенством (12), а решение уравнения (16) задается формулой (13), в которой $\Phi(x,\,t) \;= -\delta^p \;= const$, а $G(x,\,\xi,\,t)$ – на этот раз функция Грина для гиперболического уравнения. Вычисление двойного интеграла в (13) дает нулевое приближение в итерационном процессе поиска решения:

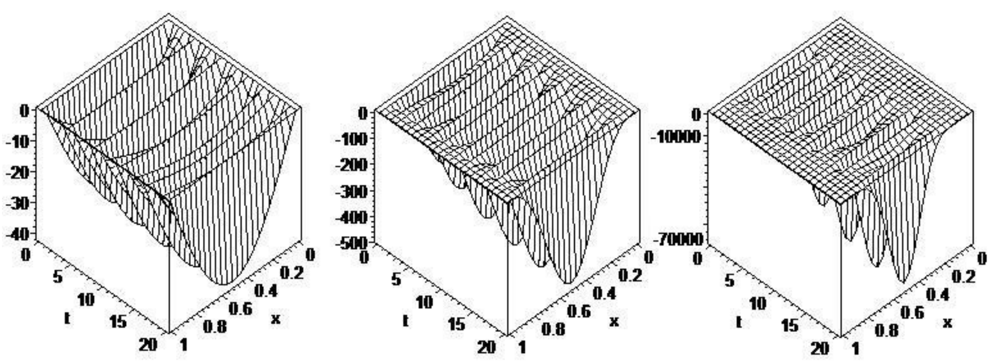
$$u^{(0)}(x,t) = -\delta^p \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2 - l^2} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{(\pi n)^2 - l^2}}{l} t \right) \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{18}$$

Как и в случае уравнения КПП, процесс решения данной задачи сводится к определению очередного приближения по формуле (14) с функцией $u^{(0)}(x,\,t)$, определяемой равенством (18), и соответствующей функцией Грина $G(x,\,\xi,\,t)$.

Пример 2. Пусть $p = 2$. Применение итерационного процесса (14) с первым слагаемым в функции Грина приводит к формуле для нахождения последовательных приближений решения задачи (16), (17):

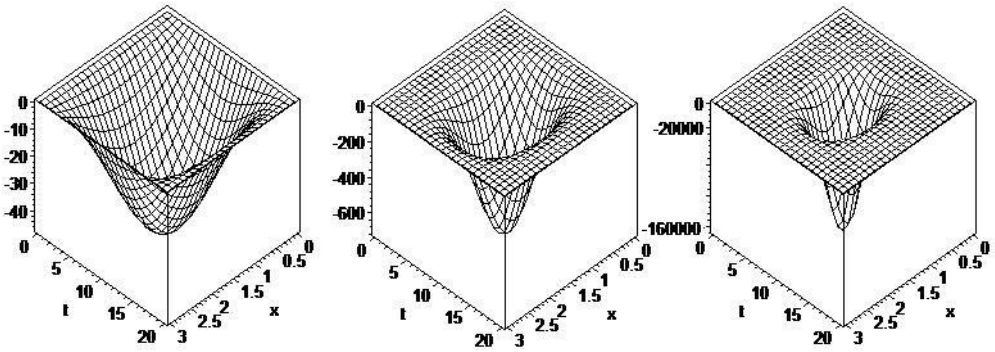
$$u^{(k)}(x,t) = -\delta^{2^{k+1}} 2^{2(2^{k+1}-1)} l^2 \left(\pi^{-1} \left(\pi^2 - l^2\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{\pi^2 - l^2}}{l} t \right) \sin \frac{\pi x}{l} \right)^{2^{k+1}-1}. \tag{19}$$

Как и в случае формулы (15) для задачи (9), (11) формула (19) последовательно аппроксимирует решение задачи (16) , (17) функциями $u^{(k)}(x,t)$,$k \to \infty$. На Рис. 3 и Рис. 4 представлены графические модели этих функций при $k = 0, 1, 2$, когда $l = 1$ и $l = 3$, соответственно.



$u^{(0)}(x,\,t)$ $\quad u^{(1)}(x,\,t)$ $\quad u^{(2)}(x,\,t)$

Рис. 3: Графики функций $u^{(k)}(x,t)$, $k = 0, 1, 2$, при $l = 1$, $T = 20$



$u^{(0)}(x,\,t)$ $\qquad$ $u^{(1)}(x,\,t)$ $\qquad$ $u^{(2)}(x,\,t)$

Рис. 4: Графики функций $u^{(k)}(x,t)$, $k = 0, 1, 2$, при $l = 3$, $T = 20$

Можно предположить, что за исключением сужающихся при $k \to \infty$ окрестностей некоторых особых точек, количество которых уменьшается с увеличением l, будет иметь место сходимость последовательности приближенных решений $u^{(k)}(x,t)$ к точному решению задачи (16), (17).

Заключение

Редукция к нагруженным уравнениям для нахождения решения начально-краевых задач для уравнений КПП и Клейна – Гордона и построение рекуррентного соотношения общего вида (4) приводит к формулам (15) и (19), определяющих последовательности приближенных решений однородных задач аппроксимирующих уравнений при $p = 2$. Анализ поверхностей, приведенных на Рис. 1, 2 и 3, 4 позволяет сделать предварительный вывод о сходимости последовательностей функций $u^{(k)}(x,t)$, являющихся приближенными решениями задач (9), (11) и (16), (17) соответственно к общим решениям этих задач. При установлении сходимости к решениям исходных уравнений их можно принять за приближенные решения уравнений (9) и (16) соответственно. Предполагается, что описанный способ может быть эффективным для решения некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных, в частности уравнений вида (1), обладающих степенной нелинейностью.

Список литературы

[1] Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 641–651.

[2] Лаптев Г.И. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // Доклады Академии наук СССР. 1987. Т. 293, № 2. С. 306–309.

[3] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 736 с.

[4] Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений. Собрание сочинений. М: Изд-во Акад. Наук СССР, 1960. Т. III, с. 323–331.

[5] Похожаев С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 101–109.

[6] Arosio A., Panizzi S. On the well-posedness of Kirchhoff string // Transactions of the American Mathematical Society. 1996. Vol. 348, № 1. Pp. 305–330.

[7] Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. Vol. 53, № 1. Pp. 13–15.

[8] Medeiros L.A., Miranda M. Local solutions for a non linear unilateral problem // Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees. 1986. Vol. 31, № 5. Pp. 371–382.

[9] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределёнными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.

[10] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[11] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

[12] Полосков И.Е. Анализ поведения распределенных систем, описываемых стохастическими уравнениями типа КПП // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. № 7. С. 61–65.

Библиографическая ссылка

Бозиев О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 127–136.

Сведения об авторах

1. **Бозиев Олег Людинович**
старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского Научного Центра РАН.

Россия, 360000, КБР, г. Нальчик, ул. И. Арманд, д. 37а.
E-mail: boziev@yandex.ru.

APPLICATION OF LOADED EQUATIONS TO APPROXIMATE SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE POWER NONLINEARITY

Boziev Oleg Ludinovich
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management
of KBSC of the Russian Academy of Sciences
Russia, 360000, KBR, Nalchik, 37a J. Armand st.
E-mail: boziev@yandex.ru

Received 27.11.2014, revised 20.12.2014.

Reduction of nonlinear partial differential equations to a loaded equation is made for finding their approximate solutions. We obtain formulas for the general term of the sequence of approximate solutions of the initial-boundary value problems for some loaded equations, for which the original nonlinear equations are reduced.

Keywords: loaded partial differential equations, differential equations with power nonlinearity, approximate solutions.

Bibliographic citation

Boziev O.L. Application of loaded equations to approximate solutions of partial differential equations with the power nonlinearity. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 127–136. (in Russian)