УДК 519.2

ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЕФЕКТА КРИТЕРИЯ, ОСНОВАННОГО НА ВЫБОРОЧНОЙ МЕДИАНЕ, В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

Сипина А.В.[1], **Бенинг В.Е.**[1,2]
[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[2]Институт проблем информатики Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 20.06.2014, после переработки 30.06.2014.

В работе приводятся численные результаты сравнения точного значения мощности критерия, основанного на выборочной медиане, и приближенного значения мощности такого критерия, вычисленного при помощи асимптотических разложений до порядка n^{-1} для случая распределения Лапласа. Численно исследуется поведение асимптотического дефекта.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, численная аппроксимация, функция мощности, дефект, выборочная медиана, распределение Лапласа.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 71–83.

1. Введение

Развивая подход, описанный в работах [1,2,11–13], рассмотрим задачу проверки простой гипотезы

$$\mathsf{H}_0 : \theta = 0 \tag{1.1}$$

против последовательности близких сложных альтернатив вида

$$\mathsf{H}_{n,1} : \theta \;=\; \frac{t}{\sqrt{n}},\; 0 \;<\; t \;<\; C,\; C \;>\; 0 \tag{1.2}$$

на основе выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ из независимых одинаково распределенных наблюдений, имеющих распределение Лапласа с плотностью

$$p(x,\ \theta) \;=\; \frac{1}{2}\, e^{-|x\ -\ \theta|}, \qquad \theta \;\in\; \mathbb{R}^1. \tag{1.3}$$

Распределение Лапласа широко применяется в прикладной статистике. Естественность возникновения этого распределения обоснована в работах [4] и [7].

Для каждого фиксированного $t \;>\; 0$ обозначим через $\beta_n^*(t)$ мощность наилучшего критерия размера $\alpha \;\in\; (0, 1)$. По лемме Неймана-Пирсона (см. [9], например, стр. 94) такой критерий существует и он основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n(t) \;\equiv\; \sum_{i=1}^{n} \Big(|X_i| \;-\; |X_i \;-\; tn^{-1/2}|\Big). \tag{1.4}$$

Рассмотрим статистику

$$T_n \;=\; \sqrt{2k}\;\zeta_n, \tag{1.5}$$

в которой ζ_n – выборочная медиана

$$\zeta_n \;=\; \begin{cases} X_{(k)}, & n = 2k+1, \\ \dfrac{X_{(k-1)} + X_{(k)}}{2}, & n = 2k, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ – вариационный ряд, построенный по исходной выборке $(X_1, \ldots, X_n)$.

Обозначим через $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$, соответственно, функцию распределения и плотность стандартного нормального распределения, а через $\beta_n(t)$ – мощность критерия размера α, основанного на статистике T_n.

В работе [1] получено асимптотическое разложение для функции мощноси $\beta_n(t)$ до порядка $n^{-1/2}$ (см. Теорему 2.1) в виде

$$\beta_n(t) \;=\; \begin{cases} \Phi(t-u_\alpha) - \dfrac{t(2u_\alpha - t)}{2\sqrt{n}}\varphi(u_\alpha - t) + o(n^{-1/2}), & t \;\leqslant\; u_\alpha, \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \Phi(t-u_\alpha) - \dfrac{2u_\alpha^2 + t^2 - 2u_\alpha t}{2\sqrt{n}}\varphi(u_\alpha - t) + o(n^{-1/2}), & t \;>\; u_\alpha, \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \Phi(t-u_\alpha) + \dfrac{t(2u_\alpha - t)}{2\sqrt{n}}\varphi(u_\alpha - t) + o(n^{-1/2}), & \alpha \;\geqslant\; \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Отметим, что применяя тот же метод, что и в работе [1], можно получить в асимптотическом разложении для функции мощности $\beta_n(t)$ члены порядка n^{-1}, поэтому мы не будем приводить здесь доказательства следующей формулы

$$\beta_n(t) = \begin{cases} \Phi(t-u_\alpha) - \dfrac{t(2u_\alpha - t)}{2\sqrt{n}}\varphi(u_\alpha - t) + \Big(C_n(u_\alpha, t) - \dfrac{(u_\alpha - t)^3 u_\alpha^2}{4n} + \\ \qquad + \dfrac{(u_\alpha - t)u_\alpha^2}{2n}\Big)\varphi(u_\alpha - t) + \mathcal{O}(n^{-3/2}), t \leqslant u_\alpha, \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \Phi(t-u_\alpha) - \dfrac{2u_\alpha^2 + t^2 - 2u_\alpha t}{2\sqrt{n}}\varphi(u_\alpha - t) + \Big(C_n(u_\alpha, t) + \\ \qquad + \dfrac{(u_\alpha - t)^3 u_\alpha^2}{4n} - \dfrac{(u_\alpha - t)u_\alpha^2}{2n}\Big)\varphi(u_\alpha - t) + \mathcal{O}(n^{-3/2}), t > u_\alpha, \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \Phi(t-u_\alpha) + \dfrac{t(2u_\alpha - t)}{2\sqrt{n}}\varphi(u_\alpha - t) + \Big(C_n(u_\alpha, t) - \dfrac{(u_\alpha - t)^3 u_\alpha^2}{4n} + \\ \qquad + \dfrac{(u_\alpha - t)u_\alpha^2}{2n}\Big)\varphi(u_\alpha - t) + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \alpha \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$C_n(u_\alpha,\; t) \;=\; \frac{3u_\alpha}{4n} - \frac{u_\alpha^3}{12n} + \frac{u_\alpha^4(u_\alpha - t)}{8n} - \frac{(u_\alpha - t)(18 + 10(u_\alpha - t)^2 - 3(u_\alpha - t)^4)}{24n}. \tag{1.9}$$

В работе [2] исследуется точность аппроксимации функций мощностей критериев, основанных на знаковой статистике и логарифме отношения правдоподобия в случае распределения Лапласа, их асимптотическими разложениями до порядка n^{-1}. Цель данной работы – получить аналогичные результаты для мощности критерия $\beta_n(t)$, основанного на выборочной медиане (1.6).

В работе используются точные формулы для мощностей $\beta_n(t)$ и $\beta_n^*(t)$. Отметим, что вычисление по явной формуле мощности $\beta_n(t)$ при $n \geqslant 1000$ и $\beta_n^*(t)$ при $n \geqslant 100$ становится ресурсозатратным.

В разделе 2 проведено сравнение мощности критерия $\beta_n(t)$, основанного на выборочной медиане, вычисленной по точной формуле и с использованием асимптотического разложения (1.8). Это приближение будем обозначать символом $\overline{\beta}_n(t)$, указывая на то, что член порядка $\mathcal{O}(n^{-3/2})$ опускается.

В разделе 3 вычислен дефект критерия, основанного на выборочной медиане относительно наиболее мощного критерия, основанного на отношении правдоподобия в случае простой альтернативы

$$\mathsf{H}_{n,t}: \ \theta \ = \ \frac{t}{\sqrt{n}}$$

с использованием явных формул и асимптотических разложений.

2. Мощность критерия, основанного на выборочной медиане

Из формулы (1.6) непосредственно видно, что представление выборочной медины при четном и нечетном n различно, поэтому и функция распределения выборочной медианы тоже различна при четном и нечетном n.

При нечетном n выборочная медиана совпадает с $(k+1)$-й порядковой статистикой, а функция распределения $(k+1)$-й порядковой статистики $F_{2k+1}(x,\theta)$, как известно, выражается формулой (см., например, [6])

$$F_{2k+1}(x,\theta) \ = \ \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i} (1 \ - \ F_\theta(x))^i \ F_\theta(x)^{2k+1-i}, \tag{2.1}$$

где $F_\theta(x)$ – функция распределения случайной величины, имеющей распределение Лапласа вида

$$F_\theta(x) \ = \ \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{x-\theta}, & x \ \leqslant \ \theta, \\ 1 \ - \ \dfrac{1}{2}e^{x-\theta}, & x \ > \ \theta. \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь случай четного n, то есть $n \ = \ 2k$. Обозначим через $q(x,y)$ совместную плотность распределения пары случайных величин $(X_{(k)}, \ X_{(k+1)})$. Справедлива следующая формула (см. [6])

$$q(x,y) \ = \ n(n-1) \ p(x,\theta) \ p(y,\theta) \ \binom{2k-2}{k-1} \ (F_\theta(x)(1 \ - \ F_\theta(y)))^{k-1}. \tag{2.3}$$

Используя эту формулу, можно получить выражение для плотности распределения выборочной медианы ζ_{2k} в виде

$$p_{2k}(x) = \frac{(2k)!}{2^k((k-1)!)^2}\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-1)^j\binom{k-1}{j}2^{-j}}{k-1-j}\,e^{-(k+1+j)|x|}\,(1 - e^{-(k-1-j)|x|}) - \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\,|x|\,e^{-2k|x|} + \frac{1}{k2^k}\,e^{-2k|x|}\right). \tag{2.4}$$

Подробный вывод этой формулы приведен в работе [10].

Используя равенство (2.4), нетрудно получить выражение для функции распределения выборочной медианы ζ_{2k}

$$F_{2k}(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{(2k)!}{2^k\,((k-1)!)^2}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k-2}\dfrac{(-1)^j\binom{k-1}{j}2^{-j}}{k-1-j}\left(\dfrac{e^{(x-\theta)(k+1+j)}}{k+1+j} - \dfrac{e^{2k(x-\theta)}}{2k}\right) + \right. \\ \left. + \dfrac{(-1)^k}{2^{k-1}}\left(\dfrac{(x-\theta)\,e^{2k(x-\theta)}}{2k} - \dfrac{e^{2k(x-\theta)}}{4k^2}\right) + \dfrac{e^{2k(x-\theta)}}{4k^2\,2^k}\right), \quad x \leqslant \theta, \\ 1 - F_{2k}(-x,-\theta), \quad x > \theta. \end{cases} \tag{2.5}$$

Вычисления по формуле (2.5) являются ресурсозатратными, что сказывается на точности результатов. Уже при $n \geqslant 60$ вычисления не дают точного результата.

Для преодоления этой трудности, воспользуемся представлением функции распределения случайной величины ζ_{2k} через функцию распределения случайной величины ζ_{2k+1} из работы [3] (формула (22)), имеем

$$F_{2k}(z) = F_{2k+1}(z) + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\int_{-\infty}^{z} g(t,z)\,d(F(t)\,F(t-2z))^k, \tag{2.6}$$

где функция $g(t,z)$ имеет вид

$$g(t,z) = \frac{p(t-2z)F(t) - p(t)F(t-2z)}{p(t-2z)F(t) + p(t)F(t-2z)} + 1 - 2F(z),$$
$$z = x - \theta, \quad p(y) = p(y,0), \quad F(y) = F_0(y).$$

После несложных преобразований получаем рекуррентную формулу для вычисления функции распределения выборочной медианы ζ_{2k}

$$F_{2k}(x,\theta) = F_{2k+1}(x,\theta) + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\big(1 - 2F(x,\theta)\big)\big(F(x,\theta)F(-x,-\theta)\big)^k +$$
$$+ \operatorname{sign}(x-\theta)\,\frac{1}{2}\binom{2k}{k}\,2^{-k}\,k\,\Big(R_k(x-\theta) - \frac{e^{-2(x-\theta)}}{2}\,R_{k-1}(x-\theta)\Big), \tag{2.7}$$

где

$$R_1(y) = e^{-|y|} - e^{-2|y|} - \frac{|y|\,e^{-2|y|}}{2},$$
$$R_k(y) = \frac{\big(e^{-|y|} - \frac{e^{-2|y|}}{2}\big)^k - 2^{-k}e^{-2k|y|}}{k} - \frac{e^{-2|y|}}{2}\,R_{k-1}(y). \tag{2.8}$$

Формула (2.7) позволяет вычислять значения функции распределения выборочной медианы для $n \leqslant 1000$.

Из формул (2.1) и (2.7) видно, что функция распределения выборочной медианы непрерывна, поэтому чтобы найти мощность $\beta_n(t)$, определяем критическое значение $c_{n,t}$ из уравнения

$$F_n(c_{n,t}, 0) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0,1). \tag{2.9}$$

Это уравнение решаем численно, методом половинного деления, с точностью 10^{-12}.

Зная критическое значение $c_{n,t}$, вычисляем мощность $\beta_n(t)$ по формуле

$$\beta_n(t) = 1 - F_n(c_{n,t}, tn^{-1/2}). \tag{2.10}$$

Таблица 1 содержит результаты аппроксимации мощности $\beta_n(t)$, полученных с помощью явных формул (2.1), (2.7) и по формуле (1.8) без остаточного члена. Это приближенное значение обозначено через $\overline{\beta}_n(t)$. Значения $\beta_n(t)$ расположены сверху, а $\overline{\beta}_n(t)$ – снизу. Расчеты проводились для наиболее используемых значений уровня значимости $\alpha = 0.01,\ 0.05,\ 0.1$.

Обозначим через $\delta_n(t,\alpha)$ ошибку аппроксимации, то есть величину

$$\delta_n(t,\alpha) \equiv \delta_n = \beta_n(t) - \overline{\beta}_n(t). \tag{2.11}$$

На Рис. 1 изображена ошибка аппроксимации для различных значений n и α. Рис. 2, на котором изображено значение $n^{3/2}\delta_n(t,\alpha)$, показывает, что ошибка δ_n имеет порядок $n^{-3/2}$, то есть величина $n^{3/2}\delta_n$ мало зависит от n.

Из представленных графиков видно, что наблюдается вполне удовлетворительное приближение функции мощности ее асимптотическим аналогом даже при малых n, что позволяет использовать величину $\overline{\beta_n}(t)$ в качестве аппроксимации для мощности $\beta_n(t)$.

3. Аппроксимация для дефекта критерия, основанного на выборочной медиане

В этом разделе получены приближенные значения для дефекта критерия, основанного на выборочной медиане.

Дефект d_n определяется (см. [14]) как разность $m_n - n$, где m_n – число наблюдений, необходимых критерию, который основан на выборочной медиане, для достижения той же мощности, что и оптимальный критерий, который основан на логарифме отношения правдоподобия Λ_n, при одинаковых альтернативах $tn^{-1/2}$. Так как функция распределения выборочной медианы непрерывна, то в предположении, что d_n непрерывная переменная, можно записать равенство для ее определения

$$\beta_n^*(t) = \beta_{m_n}(t\sqrt{m_n n^{-1}}). \tag{3.1}$$

В работе [4] получено асимптотическое разложение для мощности критерия, основанного на логарифме отношения правдоподобия $\Lambda_n(t)$:

Таблица 1: Результаты аппроксимации мощности $\beta_n(t)$

t	α	n						
		25	50	75	100	125	500	1000
0.25	0.01	0.0155 0.01509	0.01633 0.01596	0.01662 0.01641	0.01692 0.0167	0.01705 0.01691	0.01791 0.01786	0.01819 0.01816
	0.05	0.07284 0.07211	0.07522 0.07445	0.07591 0.0756	0.07673 0.07631	0.07702 0.07682	0.07917 0.07907	0.07982 0.07977
	0.1	0.14028 0.13968	0.14349 0.14261	0.14426 0.14402	0.14536 0.14489	0.14566 0.1455	0.14832 0.14822	0.14911 0.14906
0.5	0.01	0.02368 0.02236	0.02608 0.0249	0.02692 0.02624	0.02782 0.02711	0.02819 0.02773	0.03079 0.03061	0.03163 0.03154
	0.05	0.10406 0.10224	0.11018 0.10821	0.11188 0.11112	0.11401 0.11294	0.1147 0.11422	0.12016 0.11993	0.12182 0.1217
	0.1	0.19242 0.19131	0.19996 0.198	0.20162 0.2012	0.20421 0.20318	0.20482 0.20456	0.2109 0.21068	0.21267 0.21256
0.75	0.01	0.03561 0.0326	0.0407 0.03806	0.04247 0.04096	0.04439 0.04283	0.04518 0.04417	0.05076 0.05038	0.05257 0.05237
	0.05	0.14561 0.14259	0.15691 0.15347	0.1599 0.15873	0.16382 0.162	0.16501 0.16428	0.17484 0.17446	0.17779 0.17759
	0.1	0.25765 0.25654	0.27027 0.26728	0.27273 0.27237	0.27703 0.2755	0.27789 0.27768	0.28761 0.2873	0.29038 0.29023
1.0	0.01	0.05268 0.0469	0.06199 0.05711	0.06517 0.06246	0.06869 0.06588	0.07011 0.06832	0.08026 0.0796	0.08353 0.08318
	0.05	0.1992 0.19544	0.21696 0.21211	0.22134 0.22005	0.22744 0.22495	0.22913 0.22836	0.24394 0.24343	0.24829 0.24804
	0.1	0.33617 0.33598	0.35378 0.35015	0.35673 0.3568	0.3627 0.36087	0.36363 0.3637	0.37644 0.37609	0.38002 0.37984
1.25	0.01	0.07654 0.0669	0.09198 0.0842	0.09713 0.09303	0.10295 0.09862	0.10521 0.10259	0.12166 0.12069	0.12689 0.12638
	0.05	0.26597 0.2627	0.29084 0.2851	0.29645 0.29559	0.30486 0.30201	0.30692 0.30646	0.3265 0.32596	0.33213 0.33186
	0.1	0.42662 0.42834	0.44784 0.44432	0.45093 0.45176	0.45805 0.45629	0.45888 0.45942	0.47345 0.4731	0.4774 0.47723
1.5	0.01	0.10905 0.09509	0.13281 0.12193	0.14045 0.13518	0.14927 0.14348	0.15255 0.14932	0.17679 0.17557	0.18434 0.18373
	0.05	0.34595 0.34496	0.37746 0.37174	0.38386 0.38407	0.39429 0.39156	0.39649 0.39673	0.41964 0.41915	0.42611 0.42587
	0.1	0.5254 0.52885	0.54662 0.54402	0.55003 0.5512	0.55706 0.5556	0.55797 0.55867	0.57251 0.57216	0.57645 0.57626

Таблица 1: Результаты аппроксимации мощности $\beta_n(t)$ (продолжение)

t	α	n						
		25	50	75	100	125	500	1000
2.0	0.01	0.20747 0.19008	0.25354 0.23952	0.26685 0.26245	0.283 0.27641	0.28835 0.28607	0.32928 0.32815	0.34136 0.34082
	0.05	0.53672 0.54223	0.572 0.56853	0.57886 0.58071	0.59 0.58812	0.59213 0.59324	0.61596 0.61553	0.62246 0.62223
	0.1	0.70533 0.70741	0.72535 0.72181	0.72803 0.72875	0.73507 0.73305	0.73562 0.73605	0.74986 0.7494	0.75374 0.7535
2.5	0.01	0.35776 0.36023	0.42637 0.42029	0.4435 0.44718	0.46541 0.46329	0.4717 0.47433	0.52164 0.52137	0.53538 0.53525
	0.05	0.71422 0.71783	0.74521 0.7411	0.75057 0.75191	0.76068 0.75851	0.76223 0.76307	0.78342 0.78296	0.78919 0.78896
	0.1	0.83565 0.83656	0.85368 0.85022	0.85624 0.85668	0.86248 0.86065	0.86312 0.86341	0.87595 0.87557	0.87946 0.87928
3.0	0.01	0.55001 0.56485	0.62098 0.61867	0.6373 0.6426	0.65788 0.65689	0.66341 0.66665	0.70826 0.70812	0.72035 0.72029
	0.05	0.84151 0.84398	0.8664 0.86317	0.87068 0.87189	0.87867 0.87715	0.87996 0.88077	0.8966 0.89634	0.9011 0.90098
	0.1	0.91647 0.91721	0.93066 0.9285	0.93303 0.93362	0.93766 0.93669	0.93838 0.93881	0.94803 0.94788	0.95064 0.95057
3.5	0.01	0.72454 0.73835	0.78191 0.78087	0.79409 0.79942	0.81048 0.81038	0.8145 0.81783	0.84893 0.84905	0.85801 0.8581
	0.05	0.91984 0.92243	0.93759 0.93623	0.94083 0.94225	0.94621 0.9458	0.94725 0.94821	0.9583 0.95831	0.96122 0.96123
	0.1	0.9608 0.96226	0.97043 0.96987	0.97224 0.97313	0.97512 0.97503	0.97571 0.97632	0.98159 0.98164	0.98312 0.98315
4.0	0.01	0.84826 0.86099	0.88914 0.89022	0.89745 0.90256	0.90862 0.90974	0.91133 0.91456	0.93389 0.93429	0.93964 0.93986
	0.05	0.96254 0.96581	0.97373 0.97402	0.97587 0.97742	0.97897 0.97937	0.97967 0.98068	0.98577 0.98593	0.9873 0.98739
	0.1	0.98281 0.98494	0.98852 0.98898	0.98965 0.99061	0.99117 0.99154	0.99154 0.99215	0.99447 0.99458	0.99518 0.99524
4.5	0.01	0.92369 0.93545	0.94965 0.95241	0.95479 0.95928	0.96136 0.96319	0.963 0.96578	0.97555 0.97604	0.97857 0.97883
	0.05	0.98363 0.98705	0.98992 0.99093	0.99114 0.99246	0.99268 0.99331	0.99307 0.99387	0.99588 0.99604	0.99652 0.99661
	0.1	0.99289 0.99495	0.99591 0.9966	0.9965 0.99723	0.99719 0.99758	0.99738 0.99781	0.99859 0.99867	0.99885 0.99889

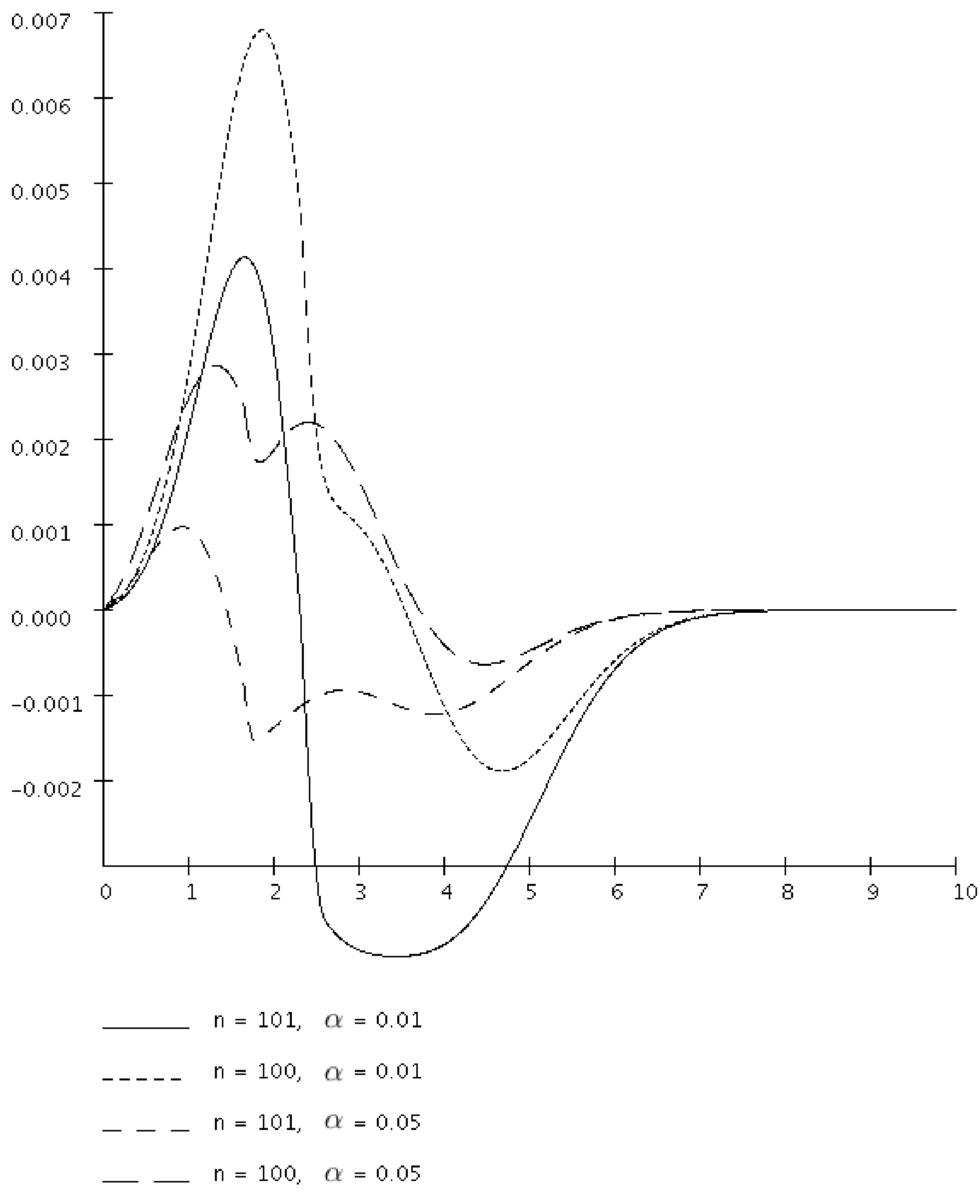

Рис. 1: Ошибка аппроксимации для различных значений n и α

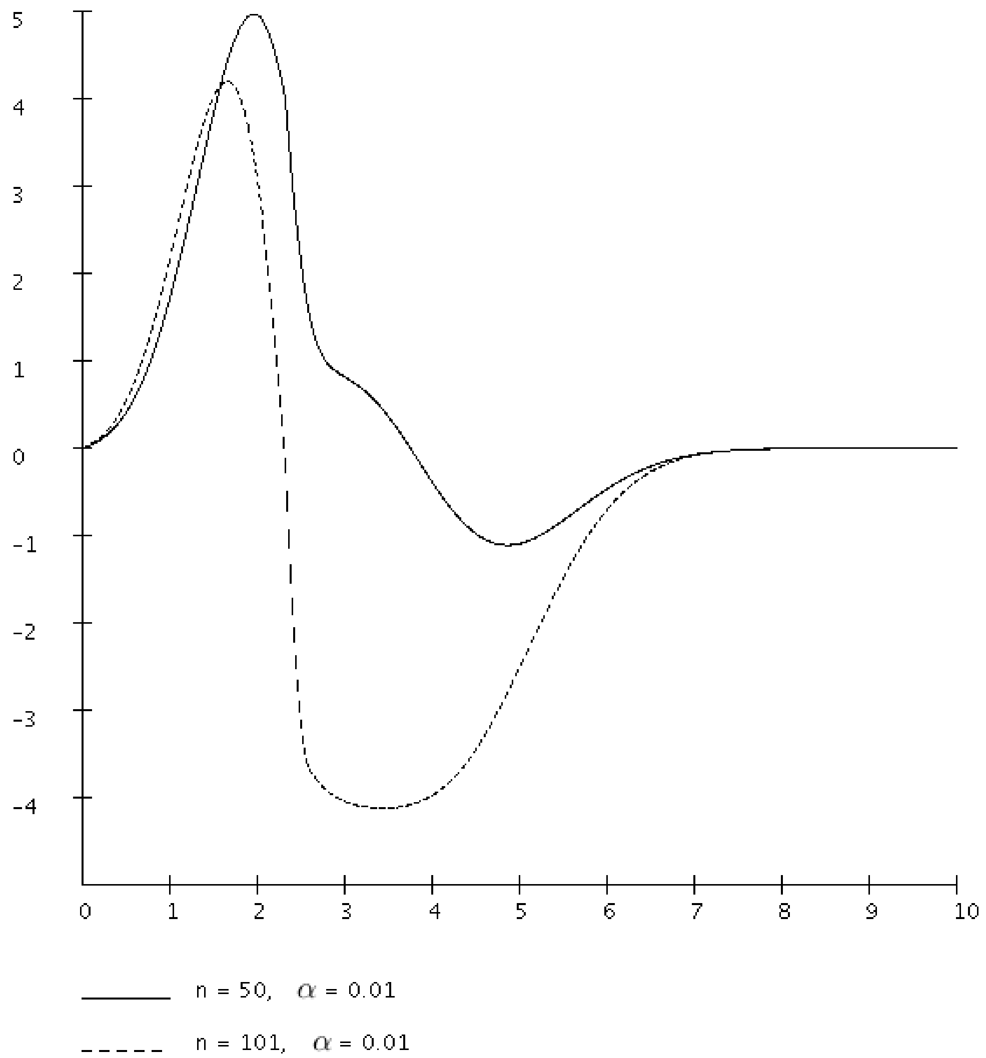

Рис. 2: Значение $n^{3/2}\delta_n(t,\alpha)$

$$\beta_n^*(t) \;=\; \Phi(t-u_\alpha) \;-\; \frac{t^2}{6\sqrt{n}}\,\varphi(u_\alpha \;-\; t) \;-$$

$$-\;\frac{t}{12n}\Big(\frac{t^4}{6} \;-\; \frac{t^2}{3} \;-\; 1 \;-\; u_\alpha\big(\frac{t^3}{6} \;-\; u_\alpha \;+\; t\big)\Big)\varphi(u_\alpha - t) + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \qquad (3.2)$$

Применяя формулу Тейлора к функции $\beta_{m_n}((m_n/n)^{1/2}t)$ с $m_n \;=\; n + \widehat{d_n}$, при этом $\widehat{d_n}$ интерпретируется как непрерывная переменная, и используя формулы (1.8) и (3.2), получаем выражения для аппроксимации d_n

$$\widehat{d}_n(\alpha,t) \;=\; \frac{2n\,\left(\beta_n^*(t) \;-\; \beta_n(t)\right)}{t\;\varphi(u_\alpha - t)}, \qquad (3.3)$$

$$\overline{d}_n(\alpha,t) \;=\; \frac{2n\,\left(\overline{\beta}_n^*(t) \;-\; \overline{\beta}_n(t)\right)}{t\;\varphi(u_\alpha \;-\; t)}. \qquad (3.4)$$

Для наглядности численных результатов определим $t_n(\alpha,\beta)$ так, чтобы

$$\beta_n^*(t_n(\alpha,\beta)) \;=\; \beta. \qquad (3.5)$$

Рассмотрим величины

$$D_n(\alpha,\beta) \;=\; d_n(\alpha,t_n(\alpha,\beta)), \qquad (3.6)$$

$$\overline{D}_n(\alpha,\beta) \;=\; \overline{d}_n(\alpha,\overline{t}_n(\alpha,\beta)). \qquad (3.7)$$

Из формулы (3.2) следует, что

$$t_n(\alpha,\beta) \;=\; u_\alpha \;+\; u_\beta \;+\; \frac{(u_\alpha \;+\; u_\beta)^2}{6\sqrt{n}} \;+\; \mathcal{O}(n^{-1}), \qquad (3.8)$$

где $\Phi(u_\beta) \;=\; \beta$.

Величина $\overline{t}_n(\alpha,\beta)$ определяется по формуле (3.8), при этом член порядка $\mathcal{O}(n^{-1})$ опускается.

Для получения точного значения $t_n(\alpha,\beta)$ решается уравнение (3.5) численными методоми с точностью 10^{-6}.

Используя явные формулы для мощностей критериев, основанных на T_n и $\Lambda_n(t)$, для вычисления $D_n(\alpha,\beta)$ численно решается уравнение (3.1) с учетом того, что $m_n \;=\; n \;+\; d_n$. Вопрос получения явной формулы для мощности $\beta_n^*(t)$ подробно рассмотрен в работе [2], поэтому мы здесь не останавливаемся на вопросе вычисления мощности $\beta_n^*(t)$.

Результаты вычислений приведены в Таблице 3.

Поскольку вычисление мощности $\beta_n^*(t)$ является ресурсозатратным при $n \;\geqslant\; 100$, то в таблице представлены значения лишь для $n \leqslant 100$. Значения $D_n(\alpha,\beta)$ находятся сверху, $\overline{D}_n(\alpha,\beta)$ – снизу.

Из таблицы видно, что ошибка $\overline{D}_n(\alpha,\beta)$ меньше 1, поэтому $\overline{D}_n(\alpha,\beta)$ может рассматриваться в качестве аналога дефекта критерия, основанного на выборочной медиане по отношению к наиболее мощному критерию в случае простой альтернативы $t\;n^{-1/2}$.

Таблица 3: Случаи $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$ и 0.9, $D_n(\alpha, \beta)$ – сверху, $\overline{D}_n(\alpha, \beta)$ – снизу

β	$n =$	10	20	30	40	50	60	80	100
0.5		1.9958	3.5	4.3748	5.5	6.8558	7.5	8.9078	9.5
		2.1594	3.5174	4.6016	5.5256	6.3433	7.084	8.4009	9.5618
0.9		1.0129	1.1001	1.5000	1.8102	2.9866	3.3574	3.5000	3.5886
		0.4320	1.1956	1.7545	2.2155	2.6164	2.9758	3.6087	4.0622

Заключение

Таким образом, в работе исследуется точность аппроксимации функций мощностей критериев, основанных на выборочной медиане и логарифме отношения правдоподобия в случае распределения Лапласа, их асимптотическими разложениями до порядка n^{-1}.

В работе используются точные формулы для мощностей этих критериев, полученные ранее. Отметим, что вычисления по явным формулам этих мощностей при $n \geqslant 100$ становится весьма ресурсозатратным. Эта трудность преодолевается с помощью рекуррентных формул. Проведенное сравнение убедительно показывает, что приближенные формулы весьма точно аппроксимируют точные значения рассматриваемых мощностей критериев и их дефектов. Приведенные приближенные формулы могут с успехом применяться в практических расчетах.

Список литературы

[1] Бенинг В.Е., Сипина А.В. Асимптотическое разложение для мощности критерия, основанного на выборочной медиане, в случае распределения Лапласа // Информатика и ее применения. 2010. Т. 4, № 1. С. 18–23.

[2] Королев Р.А. О численной аппроксимации мощностей критериев в случае распределения Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2009. № 12. С. 59–76.

[3] Бурнашев М.В. Асимптотические разложения для медианной оценки параметра // Теория вероятностей и ее применения. 1996. Т. 41, № 4. С. 738–753.

[4] Королев Р.А., Бенинг В.Е. Асимптотические разложения для мощностей критериев в случае распределения Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2008. № 10. С. 97–107.

[5] Королев Р.А., Тестова А.В., Бенинг В.Е. О мощности асимптотически оптимального критерия в случае распределения Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2008. № 8. С. 5–23.

[6] David H.A., Nagaraja H.N. Order Statistics. New Jersey: Wiley, 2003. 458 p.

[7] Kotz S., Kozubowski T.J., Podgorski K. The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance. Birkhuser, 2001. 349 p.

[8] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[9] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.

[10] Asrabadi B.R. The exact confidence interval for the scale parameter and the MVUE of the Laplace distribution // Communications in Statistics - Theory and Methods. 1985. Vol. 14, № 3. Pp. 713–733.

[11] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses. Utrecht: VSP, 2000. 277 p.

[12] Bening V.E. A forumula for dificiency: one sample L- and R-tests. I, II // Mathematical Methods of Statistics. 1995. № 4. Pp. 167–188, 274–293.

[13] Pfanzagl J. Asymptotic expansions in parametric statistical theory // In: Developments in Statistics / Ed. by P.R. Krishnaiah. New York, London: Academic Press, 1989. Vol. 3. Pp. 1–97.

[14] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

Библиографическая ссылка

Сипина А.В., Бенинг В.Е. Численная аппроксимация дефекта критерия, основанного на выборочной медиане, в случае распределения Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 71–83.

Сведения об авторах

1. **Сипина Анна Владимировна**
аспирантка кафедры математической статистики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ, ф-т ВМиК.
E-mail: anna@sipin.ru.

2. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ, ф-т ВМиК.
E-mail: bening@yandex.ru.

NUMERICAL APPROXIMATION FOR THE DEFICIENCY OF TEST BASED ON THE SAMPLE MEDIAN IN THE CASE OF LAPLACE DISTRIBUTION

Sipina Anna Vladimirovna
PhD student of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, MSU.

Bening Vladimir Evgenyevich
Professor of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, MSU. E-mail: bening@yandex.ru

Received 20.06.2014, revised 30.06.2014.

In the paper we obtain numerical results of comparison of the exact value and the approximate one for the power of test based on the sample median in the case of Laplace distribution. We use asymptotic expansions for these comparison up to n^{-1}. Numerically results for asymptotic deficiency are also obtained.

Keywords: asymptotic expansion, numerical approximation, power function, deficiency, sample median, Laplace or double exponential distribution.

Bibliographic citation

Sipina A.V., Bening V.E. Numerical approximation for the deficiency of test based on the sample median in the case of Laplace distribution. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 71–83. (in Russian)