УДК 519.8

СТОХАСТИЧЕСКИЙ КВАЗИГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВОЗМОЖНОСТНО-ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА[1]

Егорова Ю.Е., Язенин А.В.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 05.09.2014, после переработки 04.10.2014.

В статье рассмотрен и специфицирован метод стохастических квазиградиентов для решения задач возможностно-вероятностного программирования из одного класса, в котором взаимодействие нечетких параметров задачи описывается слабейшей t-нормой. Возможности метода демонстрируются на модельном примере.

Ключевые слова: возможностно-вероятностная оптимизация, стохастический квазиградиентный метод, нечеткая случайная величина, слабейшая t-норма.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 57–70.

1. Введение

В [1] на основе анализа результатов работ [2-5] систематизированы и представлены базовые модели возможностно-вероятностной оптимизации. В этих моделях одним из принципов принятия решений в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа, используемым для снятия вероятностного фактора неопределенности, является принцип ожидаемой возможности.

В случае сильнейшей t-нормы, описывающей взаимодействие нечетких факторов, методы решения задач возможностно-вероятностной оптимизации по данным моделям получены и исследованы достаточно полно в $[2, 3, 5]$. Эти методы могут быть классифицированы как непрямые методы оптимизации.

Однако, при слабейшей t-норме методы решения требуют дальнейшего исследования и развития. Так при линейных возможностно-вероятностных функциях, участвующих в формировании моделей критериев и ограничений, задача идентификации функций распределения их ожидаемой возможности связана с расчетом математических ожиданий функций случайных величин, которые являются негладкими. В такой ситуации реализация непрямых методов сопряжена со значительной вычислительной сложностью.

Альтернативный подход к решению задач данного класса, основанный на стохастических квазиградиентных методах, предложен в [1]. В данной работе мы развиваем идеи и концепции, обозначенные в [1]. Специфицируется стохастический

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00277_а) и частично при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект №680).

квазиградиентный метод решения задач данного класса. Формализм описания и исследование проблемы базируется на математической модели нечеткой случайной величины.

2. Необходимые понятия и обозначения

В соответствии с [6–8] введем ряд определений и понятий из теории возможностей. Пусть $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$ и (Ω, B, P) есть возможностное и вероятностное пространства, Γ – произвольное множество с элементами $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ – множество всех подмножеств Γ, E^1 – числовая прямая, π, ν – меры возможности и необходимости соответственно.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения.

Определение 1. *Возможностно-вероятностная величина Y есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \to E^1$, являющаяся P-измеримой для каждого фиксированного γ, а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\left\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\right\}$$

называется ее функцией распределения.

Следуя [9] дадим определение взаимной t-связанности нечетких величин относительно произвольной t-нормы, описывающей их взаимодействие.

Определение 2. *Возможностные величины $A_1, \ldots, A_n$ называются взаимно T-связанными, если для любого индексного множества $\{i_1, \ldots i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ справедливо*

$$\mu_{A_{i_1},\ldots,A_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \pi\left\{\gamma \in \Gamma | A_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \ldots, A_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}\right\} =$$
$$= \pi\left\{A_{i_1}^{-1}\left\{x_{i_1}\right\} \cap \cdots \cap A_{i_k}^{-1}\left\{x_{i_k}\right\}\right\} = T(\pi(A_{i_1}^{-1}\left\{x_{i_1}\right\}), \ldots, \pi(A_{i_k}^{-1}\left\{x_{i_k}\right\})),$$
$$x_{i_j} \in E^1.$$

В нашем исследовании мы будем использовать сдвиг-масштабное представление нечеткой случайной величины [10]

$$X(\omega, \gamma) = a(\omega) + d(\omega) \cdot Z(\gamma),$$

где $a(\omega), d(\omega)$ – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, P), имеющие конечные моменты второго порядка, а $Z(\gamma)$ – нечеткая величина, определенная на возможностном пространстве $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$.

Понятно, что

$$E(X) = a_0 + \sigma_0 Z(\gamma) \text{ и } \mu_{E(X)}(t) = \mu_Z((t - a_0)/\sigma_0),$$

где

$$a_0 = E(a),\ \sigma_0 = E(\sigma).$$

Определение 3. *T-суммой нечетких случайных величин называется взвешенная сумма нечетких случайных величин, в сдвиг-маситабном представлении которых возможностные величины являются взаимно T-связанными.*

3. Решаемые задачи

В статье предлагаются методы решения задач по следующим базовым моделям возможностно-вероятностной оптимизации, основанных на принципе ожидаемой возможности:

P1. Модель максимизации(минимизации) возможности/необходимости достижения ожидаемого уровня притязаний критерия при построчных ограничениях по возможности/необходимости на ожидаемые значения ограничений

$$\tau\left\{\mathcal{E}f_0(x,\omega,\gamma)\ \Re_0\ 0\right\} \to \max(\min),$$

$$\begin{cases}\tau\left\{\mathcal{E}f_i(x,\omega,\gamma)\ \Re_i\ 0\right\} \geqslant \alpha_i,\ i=1,\dots,m,\\ x\in X.\end{cases}$$

P2. Модель максимазации(минимизации) с заданной возможностью/необходимостью ожидаемого критерия при построных ограничениях по возможности/необходимости на ожидаемые значения ограничений

$$k \to \max(\min),$$
$$\tau\left\{\mathcal{E}f_0(x,\omega,\gamma)\ \Re_0\ k\right\} \geqslant \alpha_0,$$

$$\begin{cases}\tau\left\{\mathcal{E}f_i(x,\omega,\gamma)\ \Re_i\ 0\right\} \geqslant \alpha_i,\ i=1,\dots,m,\\ x\in X.\end{cases}$$

В представленных моделях $X \subseteq E_+^n = \{x \in E^n : x \geqslant 0\}$; $f_i(x,\omega,\gamma)$ – возможностно-вероятностные функции: $f_i(\cdot,\cdot,\cdot) : X \times \Omega \times \Gamma \to E^1,\ i=1,\dots,m$; $\tau \in \{\pi,\nu\}$, $\Re_0, \Re_i \in \{\leqslant,\geqslant,=\}$, $\alpha_i \in (0,1]$, k – дополнительная переменная. В общем случае отношения $\Re_0, \Re_i$ могут быть нечеткими [11].

4. Стохастический квазиградиентный метод

В контексте работы [12,13] опишем метод стохастических квазиградиентов.

Пусть требуется минимизировать

$$\mathcal{F}_0(x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases}\mathcal{F}_i(x) \leqslant 0,\ i=1,\dots,m,\\ x\in X.\end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через $\hat{\varphi}_x(x,u)$ вектор обобщенного градиента функции Лагранжа

$$\varphi(x,u) = \mathcal{F}_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \mathcal{F}_i(x) \tag{3}$$

по переменной x при фиксированном $u = (u_1,\dots,u_m)$, а через $\varphi_u(x,u)$ – градиент этой функции по переменным $u = (u_1,\dots,u_m)$, который очевидно равен $(\mathcal{F}_1(x),\dots,\mathcal{F}_m(x))$.

Определим последовательность точек (x^s, u^s), исходя из следующих соотношений

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s), s = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

$$u^{s+1} = \pi_U(u^s + \rho_s \gamma_s \zeta^s), s = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где (x^0, u^0) – произвольное начальное приближение, ρ_s – величина шага, γ_s – нормирующий множитель, π_U – оператор проектирования на некоторое выпуклое и замкнутое множество U, содержащее компоненты u^* седловых точек (x^*, u^*) функции Лагранжа $\varphi(x, u)$ в области $x \in X, u \geqslant 0$ (при условии, что седловая точка существует); ξ^s, ζ^s – случайные векторы такие, что

$$\mathcal{E}(\xi^s/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) = a_s \hat{\varphi}_x(x^s, u^s) + b^s, \tag{6}$$

$$\mathcal{E}(\zeta^s/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) = a_s \varphi_u(x^s, u^s) + d^s, \tag{7}$$

где случайная величина $a_s \geqslant 0$ и случайные векторы b^s, d^s измеримы относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной семейством случайных величин $(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)$. Величины ρ_s, γ_s также измеримы относительно $\mathcal{B}_s$.

Предположим, что $\mathcal{F}_i(x), i = 0, 1, \ldots, m$ – непрерывные и выпуклые вниз в области X функции; множество X выпуклое и замкнутое; ограничения удовлетворяют условию Слейтера.

Теорема 1. *[12] Пусть функция $\mathcal{F}_0(x)$ строго выпуклая, η_s – случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)$, такая, что*

$$\mathcal{E}(\|\xi^s\|^2 + \|\zeta^s\|^2/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) \leqslant \eta_s^2 \leqslant C_L < \infty \tag{8}$$

при $\|x^k\| + \|u^k\| \leqslant L < \infty$, $k = 0, 1, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s для некоторых чисел $\underline{\gamma}, \overline{\gamma}$ удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s(\eta_s + \tau_s\|x^s\| + \vartheta_s\|u^s\|) \leqslant \overline{\gamma} < \infty, \tag{9}$$

где $\tau_s = 1$ при $\|b^s\| > 0$ и $\tau_s = 0$ при $\|b^s\| = 0$; $\vartheta_s = 1$ при $\|d^s\| > 0$ и $\vartheta = 0$ при $\|d^s\| = 0$; величины ρ_s, a_s, b^s, d^s такие, что

$$\rho_s \geqslant 0, a_s \geqslant 0, \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{E}(\rho_s\|d^s\| + \rho_s\|d^s\| + \rho_s^2) < \infty, \tag{10}$$

кроме того, с вероятностью 1

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \infty. \tag{11}$$

Тогда с вероятностью 1 одна из предельных точек последовательности x^s принадлежит X^*, то есть п.н.

$$\lim_{s \to \infty} \min_{0 \leqslant k \leqslant s} \mathcal{F}^0(x^k) = \mathcal{F}'(x^*), x^* \in X^*.$$

5. Спецификация стохастического квазиградиентного метода для решения задачи возможностно-вероятностного программирования

Рассмотрим модель $P2$ при независимых случайных параметрах и слабейшей t-норме

$$T_W(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, & \text{если} \max\{x,y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

описывающей взаимодействие нечетких параметров:

$$k \to \max,$$

$$\tau\left\{\mathcal{E} f_0(x,\omega,\gamma)\ \Re_0\ k\right\} \geqslant \alpha_0, \tag{12}$$

$$\begin{cases} \tau\left\{\mathcal{E} f_i(x,\omega,\gamma)\ \Re_i\ 0\right\} \geqslant \alpha_i,\ i = 1,\ldots,m, \\ x \in X. \end{cases} \tag{13}$$

В этой модели

$$f_0(x,\omega,\gamma) = \sum_{j=0}^{n} A_{0j}(\omega,\gamma) x_j,$$

$$f_i(x,\omega,\gamma) = \sum_{j=0}^{n} A_{ij}(\omega,\gamma) x_j - B_i(\gamma),\ i = 1,\ldots,m.$$

Здесь $A_{ij}(\omega,\gamma)$ есть нечеткие случайные величины, имеющие сдвиг-масштабное представление:

$$A_{ij}(\omega,\gamma) = c_{ij}(\omega) + d_{ij}(\omega) Z_{ij}(\gamma),$$

где $c_{ij}(\omega), d_{ij}(\omega)$ – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, P); $Z_{ij}(\gamma), B_i(\gamma)$ – взаимно T_W-связанные нечеткие интервалы.

В случае $\Re_0$ = «$\leqslant$», $\Re_i$ = «$\leqslant$», τ = «ν», после снятия неопределенности возможностного типа, можно, основываясь на [14], привести (12), (13) к следующей задаче стохастического программирования

$$\mathcal{F}_0(x) \to \min, \tag{14}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_i(x) \leqslant 0,\ i = 1,\ldots,m, \\ x \in X, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\mathcal{F}_0(x) = h_0(x) + \mathcal{E} g_0(x,\theta),$$

$$\mathcal{F}_i(x) = h_i(x) + \mathcal{E} g_i(x,\theta) - v_i,\ i = 1,\ldots,m,$$

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 0,\ldots,m,$$

$$g_i(x,\theta) = \delta_i \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{b_{ij} \theta_{ij} x_j\right\},\ i = 0,\ldots,m,$$

а θ_{ij} – независимые случайные величины, $\delta_i = R^{-1}(1-\alpha_i)$, v_i – константа.

Построим функцию Лагранжа

$$\varphi(x,u) = \mathcal{F}_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \mathcal{F}_i(x) =$$

$$= h_0(x) + \delta_0 \mathcal{E} g_0(x,\theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i (h_i(x) + \delta_i \mathcal{E} g_i(x,\theta) - v_i). \quad (16)$$

Пусть функции $\mathcal{F}_i(x),\ i = 1,\ldots,m$ являются непрерывными и выпуклыми в области X, а функция $\mathcal{F}_0(x)$ является строго выпуклой и непрерывной. Тогда в качестве квазиградиентов по x на s-ой итерации для функций $\mathcal{F}_i(x),\ i = 0,\ldots,m$ можно взять следующие векторы

$$\xi_i^s = \nabla h_i(x^s) + \delta_i \nabla \hat{g}_i(x^s, \theta^s), \quad (17)$$

$$\nabla h_i(x^s) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \quad (18)$$

$$\nabla \hat{g}_i(x^s, \theta^s) = (0, \ldots, b_{ij_i^s} \theta^s_{ij_i^s}, \ldots, 0), \quad (19)$$

где x^s – точка, полученная на s-ой итерации, $\theta^s_{ij_i^s}$ – реализация случайной величины на s-ой итерации, j_i^s – такой номер, что $a_{ij_i^s} \theta^s_{ij_i^s} x^s_{ij_i^s} \geqslant a_{ij} \theta_{ij} x_{ij},\ \forall j = 1,\ldots,n,\ i = 1,\ldots,m.$

Тогда для функции Лагранжа $\varphi(x,u)$ квазиградиент по x на s-ой итерации примет вид

$$\xi^s = \xi_0^s + \sum_{i=1}^{m} u_i \xi_i^s. \quad (20)$$

В качестве же квазиградиента по u функции Лагранжа $\varphi(x,u)$ можно выбрать

$$\zeta^s = (\mathcal{F}_1(x), \ldots, \mathcal{F}_m(x)). \quad (21)$$

Покажем, что выбранные векторы действительно являются квазиградиентами функции Лагранжа по x и по u.

Может быть доказан ряд теорем [12], результаты которых нам необходимы в дальнейшем.

Лемма 1. *Если $\nabla \hat{g}_1(x), \ldots, \nabla \hat{g}_n(x)$ есть обобщенные градиенты функций $g_1(x), \ldots, g_n(x)$, соответственно, тогда $\nabla \hat{g}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \nabla \hat{g}_i(x)$ – обобщенный градиент функции $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x),\ a_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n.$*

Доказательство. Покажем, что вектор $\nabla \hat{g}(x)$ удовлетворяет условию

$$g(z) - g(x) \geqslant (\nabla \hat{g}(x),\ z - x).$$

Действительно

$$g(z) - g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i(z) - g_i(x)),$$

а так как $\nabla \hat{g}_i(x)$ есть обобщенные градиенты функций $g_i(x)$, то

$$g_i(z) - g_i(x) \geqslant (\nabla \hat{g}_i(x),\ z - x),\ i = 1,\ldots,n.$$

Следовательно

$$g(z) - g(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(\nabla\hat{g}_i(x),\ z - x) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} a_i \nabla\hat{g}_i(x),\ z - x) = (\nabla\hat{g}(x),\ z - x).$$

□

Лемма 2. *Пусть* $\xi_1^s, \ldots, \xi_n^s$ *– стохастические квазиградиенты функций* $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ *соответственно, при этом*

$$\mathcal{E}(\xi_i^s / x^s) = \nabla\hat{g}_i(x^s),$$

где $\nabla\hat{g}_i(x)$ *есть обобщенный градиент* $g_i(x),\ i = 1, \ldots, n$. *Тогда* $\xi^s = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^s$ *есть стохастический квазиградиент функции* $g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$.

Доказательство. Действительно

$$\mathcal{E}(\xi^s / x^s) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(\xi_i^s / x^s) = \sum_{i=1}^{n} \nabla\hat{g}_i(x^s),$$

а по Лемме 1 $\sum_{i=1}^{n} \nabla\hat{g}_i(x^s)$ есть обобщенный градиент функции $g(x)$. Следовательно ξ^s – квазиградиент функции $g(x)$. □

Лемма 3. *[12] Пусть некоторая функция* $G(x)$ *имеет вид*

$$G(x) = \mathcal{E} \max_{y \in Y} g(x, y, \theta).$$

Предположим, что при каждом x *и* θ *существует такое* $y(x, \theta)$, *что*

$$g(x, y(x, \theta), \theta) = \max_{y \in Y} g(x, y, \theta),$$

при каждом y *и* θ *функция* $g(x, y, \theta)$ *выпукла и непрерывна в выпуклой и замкнутой области* X, *при этом пусть* $\nabla\hat{g}(x, y, \theta)$ *– есть обобщенный градиент по* x *при фиксированных* y *и* θ.

Тогда в качестве стохастического квазиградиента функции $G(x)$ *можно выбрать следующий вектор*

$$\xi^s = \nabla\hat{g}(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s),$$

где $\theta^s,\ s = 0, 1, \ldots,$ *– независимые наблюдения состояния природы* θ.

Используя доказанные утверждения, покажем, что векторы (20), (21) являются квазиградиентами функции Лагранжа по x и по u.

Утверждение 1. Вектор $\nabla g_i(x^s, \theta^s) = (0, \ldots, b_{ij_i^s}\theta_{ij_i^s}^s, \ldots, 0)$ является квазиградиентом функции

$$G_i(x) = \mathcal{E} g_i(x, \theta) = \mathcal{E} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ b_{ij}\theta_{ij}x_j \right\}.$$

Доказательство. Функцию $G_i(x)$ можно записать в следующем виде

$$G_i(x) = \mathcal{E} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} r_i(x, j, \theta),$$

где $r_i(x, j, \theta) = b_{ij}\theta_{ij}x_j,\ j = 1, \dots, n$.

Так как функция $r_i(x, j, \theta)$ при каждом j и θ выпукла и непрерывна, то по Лемме 1 в качестве квазиградиента функции $G_i(x)$ можно выбрать обобщенный градиент функции $r_i(x, j(x, \theta), \theta)$, где $j(x, \theta)$ такой, что

$$r_i(x, j(x, \theta), \theta) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} r_i(x, j, \theta).$$

То есть квазиградиентом функции $G_i(x)$ будет вектор

$$\nabla \hat{g}_i(x^{\cdot}\theta^s) = (0, \dots, b_{ij_i^s}\theta^s_{ij_i^s}, \dots, 0),$$

где x^s – точка, полученная на s-ой итерации, θ^s – реализация случайной величины на s-ой итерации, j_i^s – такой номер, что $a_{ij_i^s}\theta^s_{ij_i^s}x^s_{ij_i^s} \geqslant a_{ij}\theta_{ij}x_{ij},\ j = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m.$ □

Утверждение 2. ξ_i^s есть стохастический квазиградиент функции $\mathcal{F}_i(x)$, для $i = 0, \dots, m$.

Доказательство. Очевидно, что $\nabla h_i(x^s)$ является и квазиградиентом и обобщенным градиентом функции $h_i(x)$.

Так как по Утверждению 1 $\nabla \hat{g}_i(x^s, \theta^s)$ – квазиградиент функции $G_i(x) = \mathcal{E} g_i(x, \theta)$, то

$$\mathcal{E}(\xi_i^s / x^s) = \mathcal{E}(\nabla h_i(x^s)/x^s) + \delta_i \mathcal{E}(\nabla \hat{g}_i(x^s, \theta^s)/x^s) = \nabla h_i(x^s) + \delta_i \nabla \hat{G}_i(x).$$

По Лемме 1 $\nabla h_i(x^s) + \delta_i \nabla \hat{G}_i(x)$ есть обобщенный градиент функции $\mathcal{F}_i$. □

Утверждение 3. Вектор ξ^s является стохастическим квазиградиентом по x функции Лагранжа $\varphi(x, u)$.

Доказательство. Так как функция Лагранжа $\varphi(x, u)$ есть взвешенная сумма функции цели и функций ограничений, а вектор ξ^s есть взвешенная сумма обобщенных градиентов функции цели и функций ограничений, то по Лемме 3 вектор ξ^s является квазиградиентом по x функции Лагранжа $\varphi(x, u)$. □

Утверждение 4. Вектор ζ^s является стохастическим квазиградиентом по u функции Лагранжа $\varphi(x, u)$.

Доказательство. Так как ζ^s является градиентом по u функции Лагранжа $\varphi(x, u)$, следовательно, ζ^s является и квазиградиентом по u функции Лагранжа $\varphi(x, u)$. □

Пусть в задаче (14), (15) функции $\mathcal{F}_i(x),\ i = 0, \dots, m$ выпуклые и непрерывные в замкнутой и выпуклой области X; ограничения (14) удовлетворяют условию Слейтера, то есть функция Лагранжа $\varphi(x, u)$ имеет седловую точку (x^*, u^*) в области $x \in X,\ u \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть функция $\mathcal{F}_0(x)$ строго выпуклая, η_s – случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)$, такая, что*

$$\mathcal{E}(\|\xi^s\|^2 + \|\zeta^s\|^2/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) \leqslant \eta_s \leqslant C_L < \infty \tag{22}$$

при $\|x^k\| + \|u^k\| \leqslant L < \infty,\ k = 0, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s для некоторых чисел $\underline{\gamma}$, $\overline{\gamma}$ удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s \eta_s \leqslant \overline{\gamma} < \infty; \tag{23}$$

величина ρ_s такая, что

$$\rho_s \geqslant 0, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty. \tag{24}$$

Тогда с вероятностью 1 одна из предельных точек последовательности x^s, определенная рекурсивной формулой (4), принадлежит X^*.

Доказательство. Так как

$$\mathcal{E}(\xi^s/(x^s, u^s)) = \hat{\varphi}_x(x^s, u^s) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}(\zeta^s/(x^s, u^s)) = \varphi_u(x^s, u^s),$$

то в формулах (6), (7) $a_s = 1,\ b^s = d^s = (0, \ldots, 0)$, а значит $\tau_s = \vartheta_s = 0$. Поэтому неравенство (9) преобразуется в неравенство

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s \eta_s \leqslant \overline{\gamma} < \infty. \tag{25}$$

Соответственно условия (10) и (11) преобразуется к виду

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty \quad \text{и} \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty. \tag{26}$$

В остальных моментах доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1. □

6. Модельный пример

Применим специфицированный нами метод стохастических квазиградиентов для решения следующей задачи

$$k \to \min,$$

$$\nu \left\{ \mathcal{E} \left(A_{01}(\omega, \gamma) x_1 + A_{02}(\omega, \gamma) x_2 \right) \leqslant k \right\} \geqslant 0.6,$$

$$\begin{cases} \nu \left\{ \mathcal{E} \left(A_{11}(\omega, \gamma) x_1 + A_{12}(\omega, \gamma) x_2 \right) \leqslant 0 \right\} \geqslant 0.8, \\ \nu \left\{ \mathcal{E} \left(A_{21}(\omega, \gamma) x_1 + A_{22}(\omega, \gamma) x_2 \right) \leqslant 0 \right\} \geqslant 0.5, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь $A_{ij}(\omega,\gamma)$ имеют сдвиг-масштабное представление, в котором случайные компоненты $c_{ij}(\omega)$ и $d_{ij}(\omega)$ являются независимыми и равномерно распределенными на интервале $[0,1]$, нечеткие компоненты

$$\begin{aligned} Z_{01} &= (2,3,2,1)_{LR}, & Z_{02} &= (0,5,3,2)_{LR}, \\ Z_{11} &= (1,1,1,3)_{LR}, & Z_{12} &= (2,5,2,4)_{LR}, \\ Z_{21} &= (5,7,4,2)_{LR}, & Z_{22} &= (3,7,1,2)_{LR}, \\ B_1 &= (2,5,3,2)_{LR}, & B_2 &= (4,8,4,3)_{LR}, \end{aligned}$$

а функции представления формы имеют вид

$$R(t) = L(t) = \max\{0, 1-t\},\ t \geqslant 0.$$

После снятия неопределенности нечеткого типа, получим эквивалентный аналог, являющийся задачей стохастического программирования

$$2x_1 + 3x_2 + 0.6\ \mathcal{E}\left(\max\{x_1\theta, 2x_2\theta\}\right) \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 0.8\ \mathcal{E}\left(\max\{3x_1\theta, 4x_2\theta\}\right) \leqslant 3.4, \\ 4x_1 + 4x_2 + 0.5\ \mathcal{E}\left(\max\{2x_1\theta, 2x_2\theta\}\right) \leqslant 6.5, \\ 5 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 15. \end{cases}$$

Определим компоненты ξ_i^s квазиградиента ξ^s функции Лагранжа

$$\begin{aligned} \xi_0^s &= (2,3) + 0.6\ h(x_1^s, 2x_2^s, \theta^s), \\ \xi_1^s &= (1,3) + 0.8\ h(3x_1^s, 4x_2^s, \theta^s), \\ \xi_2^s &= (4,4) + 0.5\ h(2x_1^s, 2x_2^s, \theta^s), \end{aligned}$$

где

$$h(x_1^s, x_2^s) = \begin{cases} (0, x_2^s\theta^s), & x_1^s\theta^s \leqslant x_2^s\theta^s, \\ (x_1^s\theta^s, 0), & x_1^s\theta^s > x_2^s\theta^s. \end{cases}$$

Квазиградиент ζ^s будет иметь вид

$$\zeta^s = (f_1(x1^s, x_2^s, \theta^s), f_1(x1^s, x_2^s, \theta^s)),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x1^s, x_2^s, \theta^s) &= x_1^s + 3x_2^s + 0.8 \cdot \max\{3x_1^s\theta^s, 4x_2^s\theta^s\}, \\ f_2(x1^s, x_2^s, \theta^s) &= 4x_1^s + 4x_2^s + 0.8 \cdot \max\{2x_1^s\theta^s, 2x_2^s\theta^s\}. \end{aligned}$$

Выберем в качестве начального приближения точку $x^0 = (11.7,\ 10.3)$, $u^0 = (1.0, 1.0)$, нормирующий множитель $\gamma^s = 1, s = 0, 1, \ldots$, величину шага на s-ой итерации будем вычислять по следующей формуле $\rho_s = \frac{1}{2s-1}$.

Приступим к построению последовательности точек, одна из которых определит приемлемое решение.

Итерация 10.

$$\begin{aligned} \xi^{10} &= (5.0, 13.23), & \zeta^{10} &= (37.36, 41.73), \\ x^{10} &= (7.68, 6.65), & u^{10} &= (0.58, 0.97), \end{aligned}$$

$$f_0(7.68, 6.65) = 39.74.$$

Итерация 20.

$$\xi^{20} = (3.11, 7.88), \qquad \zeta^{20} = (33.71, 38.64),$$
$$x^{20} = (5.42, 5.33), \qquad u^{20} = (0.51, 0.44),$$

$$f_0(5.42, 5.33) = 30.30.$$

Итерация 30.

$$\xi^{30} = (4.37, 9.172), \qquad \zeta^{30} = (30.33, 30.19),$$
$$x^{30} = (5.17, 5.11), \qquad u^{30} = (0.60, 0.78),$$

$$f_0(5.17, 5.11) = 28.99.$$

Итерация 40.

$$\xi^{40} = (3.74, 9.27), \qquad \zeta^{40} = (32.36, 34.82),$$
$$x^{40} = (5.31, 5.16), \qquad u^{40} = (0.76, 0.64),$$

$$f_0(5.31, 5.16) = 29.47.$$

Итерация 50.

$$\xi^{50} = (2.98, 7.01), \qquad \zeta^{50} = (29.71, 32.51),$$
$$x^{50} = (5.064, 5.14), \qquad u^{50} = (0.49, 0.86),$$

$$f_0(5.064, 5.14) = 28.88.$$

Итерация 60.

$$\xi^{60} = (3.88, 8.76), \qquad \zeta^{60} = (28.48, 28.75),$$
$$x^{60} = (5.054, 5.048), \qquad u^{60} = (0.99, 0.64),$$

$$f_0(5.054, 5.048) = 28.53.$$

Итерация 70.

$$\xi^{70} = (2.46, 5.94), \qquad \zeta^{70} = (30.68, 33.19),$$
$$x^{70} = (5.0051, 5.002), \qquad u^{70} = (0.79, 0.95),$$

$$f_0(5.0051, 5.002) = 28.28.$$

В итоге получаем приближенное решение исходной задачи возможностно-вероятностного програмирования $x^* = (5.0051, 5.002)$, а минимальное значение целевой функции в этой точке равно $f_0(x^*) = 28.28$.

Заключение

В статье разработан стохастический квазиградиентный (прямой) метод решения задач возможностно-вероятностного программирования. Его применение для решения задач рассматриваемого класса исключает необходимость вычисления математических ожиданий коэффициентов нечеткости, которые являются негладкими функциями случайных величин. Это, в конечном итоге, позволяет избежать трудностей реализации вычислительного характера. С этой точки зрения применение прямого метода является адекватным. Примером таких задач являются модели оптимизации портфеля в условиях гибридной неопределенности [15]. Проблема выбора инвестиционного портфеля может быть исследована в общем контексте возможностно-вероятностного программирования, а посредством выбора t-нормы можно в конечном итоге управлять риском портфеля.

В плане дальнейших исследований представляется необходимым получение оценок вычислительной сложности непрямых и прямых методов решения задач в условиях гибридной неопределенности при слабейшей t-норме, описывающей взаимодействие нечетких параметров, а также проведение параметрической адаптации стохастического алгоритма.

Список литературы

[1] Язенин А.В., Егорова Ю.Е. О методах решения задач возможностно-вероятностного программирования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 4(31). С. 85–103.

[2] Язенин А.В. Линейное программирование со случайными нечеткими данными // Известия Академии Наук СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 3. С. 52–58.

[3] Язенин А.В. О методе решения одной задачи линейного программирования со случайнми нечеткими данными // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. Т. 36, № 5. С. 91–95.

[4] Luhandjula M.K. Optimisation under hybrid uncertainty // Fuzzy sets and systems. 2004. Vol. 146, № 2. Pp. 187–203.

[5] Язенин А.В. О возможностно-вероятностной оптимизации // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2007. Т. 2, № 1. С. 53–72.

[6] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1, № 2. Pp. 97–110.

[7] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // In: Advances in fuzzy sets theory / Ed. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979. Pp. 165–168.

[8] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic optimization. A measure-based approach. BUTC-UW, Germany, Cotbus: Brandenburgische Technische Universitat, 1996. 140 p.

[9] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71.

[10] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2003. № 1. С. 39–43.

[11] Гордеев Р.Н., Язенин А.В. Метод решения одной задачи возможностного программирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 112–119.

[12] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 239 с.

[13] Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. М.: Наука, 1990. 184 с.

[14] Солдатенко И.С., Язенин А.В. Задача возможностной оптимизации с взаимно t-связанными параметрами: сравнительное изучение // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 87–98.

[15] Yazenin A.V. Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization // Studies In Computational Intelligence. 2007. Vol. 36. Pp. 241–259.

Библиографическая ссылка

Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Стохастический квазиградиентный метод решения задач возможностно-вероятностной оптимизации одного класса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 57–70.

Сведения об авторах

1. **Егорова Юлия Евгеньевна**
аспирант кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: j.e.egorova@gmail.com

2. **Язенин Александр Васильевич**
декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Alexander.Yazenin@tversu.ru.

STOCHASTIC QUASI-GRADIENT METHOD FOR SOLVING POSSIBILISTIC PROBABILISTIC OPTIMIZATION TASK OF ONE CLASS

Egorova Yuliya Evgenyevna
PhD student of Information Technology department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: j.e.egorova@gmail.com

Yazenin Aleksander Vasilyevich
Dean of Applied Mathematics and Cybernetics faculty, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: Alexander.Yazenin@tversu.ru

Received 05.09.2014, revised 04.10.2014.

In this paper, the stochastic quasi-gradient method is described and specified for solving possibilistic-probabilistic optimization problems where fuzzy parameters are T_W(the weakest t-norm)-related. An example solved by the specified method is presented.

Keywords: possibilistic-probabilistic optimization, stochastic quasi-gradient method, possibilistic random variable, the weakest t-norm.

Bibliographic citation

Egorova Yu.E., Yazenin A.V. Stochastic quasi-gradient method for solving possibilistic-probabilistic optimization task of one class. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 57–70. (in Russian)