ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УДК 514.7

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ СВОЙСТВЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В РИМАНОВЫХ И ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Микеш Й.*, Гинтерлейтнер И.**
*Dept. of Algebra and Geometry, Palacky University, Olomouc, Czech Republic
**Inst. of Mathematics, FSI VUT Brno, Czech Republic

Поступила в редакцию 17.12.2007, после переработки 18.02.2008.

Обнаружено новое вариационное свойство геодезических (псевдо-) римановых и финслеровых пространств. Геодезические линии $x = x(t)$ относительно канонического параметра и только они являются стационарными относительно интеграла $\int_{t_0}^{t_1} f(g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j)dt$, где f $(f' \neq 0)$ дважды дифференцируемая функция, отличная от квадратного корня, g_{ij} компоненты метрического тензора, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$.

A new varionational property of geodesics in (pseudo-) Riemannian and Finsler spaces has been found. It is proved the only geodesics $x = x(t)$ with the canonical parameter are stacionary with respect to the integral $\int_{t_0}^{t_1} f(g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j)dt$, where f $(f' \neq 0)$ is a square free two differentiable function, g_{ij} are components of the metric tensor, and $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$.

Ключевые слова: геодезическая, вариационная задача, риманово пространство, финслерово пространство.
Keywords: geodesics, varianational problem, Riemannian space, Finsler space.

1. Введение

Выдающийся швейцарский математик Иоганн и Бернулли в письме Г.В. Лейбницу в 1697г. поставил задачу: на заданной поверхности разыскать кривую, проходящую через данные две точки и обладающую тем свойством, что дуга ее, соединяющая эти точки, имеет меньшую длину, нежели всякая другая дуга, проходящая через те же точки. В следующем 1698 году он сообщает в общих выражениях Лейбницу ее решение, включая смысл и доказательство.

Таким образом, 1698г. надо считать годом рождения геодезических линий, хотя первая публикация о них появилась в 1728г. и принадлежит ученику И. Бернулли – Леонарду Эйлеру, 300-летняя годовщина рождения которого отмечается в этом году.

[1] Выполнено при поддержке грантов No. 201/05/2707 и MSM 6198959214 Чешской Республики.

Задача Бернулли о геодезической и задача Галилея о брахистохроне (кривой скорейшего спуска), которую первым верно решил И. Бернулли, – вот задачи, из которых родилось вариационное исчисление.

Решение задачи Бернулли, но в гораздо более широкой постановке и в терминах современной математики было сформулировано для римановых и в определенном смысле также псевдо-римановых и финслеровых пространств [1–7].

В настоящей работе покажем одно интересное свойство геодезических линий в римановых и финслеровых пространствах связанное с данной вариационной задачей, которую напомним в следующем параграфе. Исследования ведутся локально в классе достаточно гладких функций.

2. Вариационная задача

Рассмотрим n-мерное многообразие M_n. Ограничимся рассмотрением некоторой координатной окрестности, отнесенной к системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. Напомним результаты и обозначения, которые касаются рассматриваемой вариационной задачи [1–10].

Пусть γ – регулярная кривая, заданная уравнениями $x^i = x^i(t)$, и A и B – две точки на ней, соответствующие значениям параметра t_o и t_1. Все индексы $i, j, \dots$, начиная с этого места, изменяются от 1 до n.

Уравнения $\overline{x}^i = x^i + \varepsilon\,\omega^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, где ε – бесконечно малая величина, а $\omega^i(x)$ – такие функции, что $\omega^i(A) = \omega^i(B) = 0$, определяют новую кривую $\overline{\gamma}$, близкую к γ и проходящую через те же точки A и B.

Рассмотрим интеграл

$$I(\gamma) = \int_{t_o}^{t_1} \mathcal{L}(t, x^1, x^2, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n)\, dt, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ – функция Лагранжа указанных аргументов, а $\dfrac{dx^i}{dt}$ для удобства обозначены через $\dot{x}^i$.

Если $\bar{I}(\gamma, \varepsilon)$ – такой же интеграл для $\overline{\gamma}$, то $\dfrac{d\bar{I}(\gamma,\varepsilon)}{d\varepsilon}$ называется *первой вариацией* интеграла I и обозначается δI.

Интеграл (1) называется *стационарным*, если его первая вариация $\delta I = 0$ при любой системе функций $\omega^i(x)$, а кривая, для которой это имеет место, называется *экстремалью* указанного интеграла.

Как известно, необходимым и достаточным условием стационарности (1) будет равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0. \tag{2}$$

Это – т.н. *уравнения Эйлера* (или *уравнения Эйлера – Лагранжа*).

3. Вариационная задача о геодезических

Рассмотрим n-мерное *финслерово пространство* F_n отнесенное к системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$, определенное метрическим тензором $g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2,$

$\ldots, \dot{x}^n)$, где $\dot{x}^i$ – координаты касательного вектора $\dot{x}$. Метрическая форма F_n имеет вид

$$ds^2 = g_{ij}(x, \dot{x})dx^i dx^j.$$

Известно [5], что в F_n существует функция $F(x, \dot{x})$ положительно однородна второй степени по $\dot{x}^i$, такая, что $g_{ij}(x, \dot{x}) = \dfrac{\partial^2 F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$. По этому, в частности, $F(x, \dot{x}) = g_{ij}(x, \dot{x})\dot{x}^i \dot{x}^j$. Очевидно, что в случае, когда компоненты метрического тензора $g_{ij}(x, \dot{x})$ не зависят на $\dot{x}$, пространство F_n становится *римановым* V_n.

В дальнейшем на сигнатуру метрической формы F_n мы не накладываем никаких ограничений, так что пологаем

$$ds^2 = e\, g_{ij}(x, \dot{x})dx^i dx^j, \tag{3}$$

где $e = \pm 1$ и знак выбирается так, чтобы $ds^2 \geqslant 0$. Подобным образом определяется метрика в псевдо-римановых пространствах [1–6]. По аналогии, пространства с метрикой (3) – «псевдо-финслеровы». Мы их для краткости будем называть *финслеровыми.*

Длина дуги кривой γ (заданной уравнениями $x^i = x^i(t)$, $\dot{x}^i(t) = \dfrac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0$) определяется в римановом или финслеровом пространстве интегралом [1–7]:

$$s = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{e\, g_{ij}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}\, dt. \tag{4}$$

Лагранжева функция соответствующей вариационной задачи в этом случае имеет вид

$$\mathcal{L} = \sqrt{e\, g_{ij}(x, \dot{x})\dot{x}^i \dot{x}^j}.$$

Как известно [5], интеграл (4) стационарен в финслеровых пространствах тогда и только тогда, когда экстремалями являются *геодезические линии*, для которых выполняются уравнения

$$\ddot{x}^h + 2\, G^h(x, \dot{x}) = \varrho(t)\dot{x}^h, \tag{5}$$

где $\varrho(t)$ некоторая функция, $G^h = \dfrac{1}{2}\, g^{ij} \left(\dfrac{\partial^2 F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial x^k} \dot{x}^k - \dfrac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^j} \right)$ – объекты связности Бервальда, g^{ij} – компоненты обратной матрицы к g_{ij}.

Так как римановы пространства являются частным случаем финслеровых, то последнее имеет место в римановых и, подчеркнем, в псевдо-римановых пространствах, см. [1–7]. В римановых просранствах, как известно [5], $G^h = \frac{1}{2}\Gamma^h_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j$, где Γ^h_{ij} – символы Кристоффеля II типа. В этом случае уравнения геодезических принимают более известную форму [1-7].

Как известно, экстремали интеграла (4) независят от параметризации геодезических, т.е. решения уравнений (5) при регулярном изменении параметра кривой снова будут их решениями.

Функция $\varrho(t)$ тождественно обращается в нуль тогда и только тогда, когда параметр t – параметр дуги кривой или его линейная функция.

Многие авторы, как например, [1] и др. определяют *геодезическую* в римановых и псевдо-римановых пространствах как экстремальную кривую следующей вариационной задачи

$$I = \int_{t_o}^{t_1} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \; dt\,. \tag{6}$$

Экстремалями этой задачи являются геодезические линии, для которых выполняются уравнения (5) при условии $\varrho(t) \equiv 0$. Это справедливо и для финслеровых пространств.

Оказывается, что при изменении параметра так определенных геодезических форма основных уравнений геодезических (при условии $\varrho(t) \equiv 0$) сохраняется только в случае, когда это изменение линейное.

Таким образом, экстремалями интеграла (6) в римановых и финслеровых пространствах являются геодезические линии, определенные и со своим параметром, который будем называть *каноническим* и обозначать через s. Очевидно, в римановых и финслеровых пространствах параметр длины дуги является каноническим.

4. Вариационное свойство геодезических

Рассмотрим в римановом или финслеровом пространстве более общую вариационную задачу

$$I = \int_{t_o}^{t_1} f(e\, g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j\,)\, dt\,, \tag{7}$$

где f – некоторая дважды дифференцируемая функция указанного переменного, определенная на открытом множестве $D \subset R$, причем $f'(\tau) \neq 0$ для всех значений $\tau \in D$. Число e в данном случае может принимать значение ± 1, как в (4), или значение 1, как в (6).

Непосредственным вычилением уравнений Эйлера (2) для лагражевой функции $\mathcal{L} = f(e\, g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\,)$ можно убедиться, что экстремали удовлетворяют уравнениям вида (5):

$$\ddot{x}^h + 2\, G^h(x,\dot{x}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln|f'(e\, g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta)|)\; \dot{x}^h. \tag{8}$$

Элементарно покажем, что уравнения (8) удовлетворяются вдоль геодезических отнесенных к каноническому параметру s, но только для тех параметров s, для которых $e\, g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \in D$. Очевидно, в этом случае левая сторона (8) обращается в нуль, так как параметр канонический. Обращение в нуль правой стороны вытекает из факта, что вдоль этой геодезической $e\, g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = k$ – const. Поэтому можем рассматривать лишь те геодезические с каноническим параметром s, для которых $k \in D$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Геодезические линии, отнесенные к каноническому параметру s, для которых $e\, g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = k \in D$, являются экстремалями интерала (7) в финслеровых или римановых пространствах.

Легко проверить, что при этом почти всегда определенным способом определен и параметр данных экстремалей – геодезических. Т.е. при общем изменении параметра экстремалей интеграла (7), подобно тому как в случае $f(x) \equiv x$, теряется их экстремальность по отношению этого интеграла (7).

Как известно [8,9,10], на основании теории вариационного исчисления вытекает что, интеграл (1) не зависит на параметризации экстремалей тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(t, x, \dot{x})$ – однородная функция относительно $\dot{x}$.

В нашем случае $\mathcal{L} \equiv f(e\, g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)$. Поэтому функция f однородная функция степени $1/2$, а это возможно только в случае, когда $f(x) \equiv \alpha\sqrt{x}$, α – const. Поэтому справедлива

Теорема 2. Все экстремали интерала (7) в финслеровом или римановом пространстве при всех регулярных изменениях параметров являются его экстремалями тогда и только тогда, когда функция $f(x) \equiv \alpha\sqrt{x}$, где α – некоторая ненулевая постоянная.

Примечание 1. Более детальным исследованием можно убедиться в том, что все возможные экстремали интеграла (7) исчерпываются геодезическими линиями, которые участвуют в теоремах 1 и 2, т.е. когда $f(x) \equiv \alpha\sqrt{x}$, α – const, – геодезические отнесенные к любому регулярному параметру, для любой другой функции f ими являются только геодезические отнесенные к каноническому параметру.

Примечание 2. В случае, когда $f'(0) \neq 0$, т.е. когда $0 \in D$, выше указанные результаты справедливы и для изотропных геодезических (для которых, как известно, $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$).

Список литературы

[1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1980. – 760 с.

[2] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. – 495 с.

[3] Радулович Ж., Микеш Й., Гаврильченко М.Л. Геодезические отображения и деформации римановых пространств. Izd. CID, Podgorica, 1997; Izd. OGU, Odessa, 1997. – 130 с.

[4] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.

[5] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. – М.: Наука, 1981. – 504 с.

[6] Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1981. – 256 с.

[7] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: ИЛ, 1948.

[8] Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М. – Л., 1950.

[9] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

[10] Kureš M. Variační počet. Brno, PC-Dir., 2000.