ВЕРОЯТНОСТНО-ВОЗМОЖНОСТНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

УДК 519.2

О МОЩНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

Р.А. Королев, А.В. Тестова, В.Е. Бенинг
Кафедра математической статистики,
факультет ВМиК МГУ, Москва

Поступила в редакцию 20.12.2007, после переработки 05.02.2008.

В работе на эвристическом уровне получена формула (см. (3.1)) для предела отклонения мощности асимптотически оптимального критерия от мощности наилучшего критерия в случае распределения Лапласа. Это отклонение в силу нерегулярности распределения Лапласа имеет порядок $n^{-1/2}$, в отличие от обычных регулярных семейств, для которых этот порядок равен n^{-1}.

In the present paper we heuristically obtain a formula (see (3.1)) for the limit of the difference between the power of the asymptotically optimal test and the power of the asymptotically most powerful (AMP) test for the case of Laplace distribution. This difference has the order $n^{-1/2}$ due to the nonregularity of the Laplace distribution, in contrast to regular laws for which this order equals n^{-1}.

Ключевые слова: распределение Лапласа, функция мощности, дефект, асимптотическое разложение.
Keywords: Laplace or double exponential distribution, power function, deficiency, asymptotic expansion.

1. Введение

Рассмотрим задачу проверки простой гипотезы в случае однопараметрического семейства. Пусть имеются независимые наблюдения $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$, каждое из которых принимает значения в произвольном измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ и имеет неизвестную с точностью до параметра θ плотность $p(x, \theta)$ относительно некоторой σ-конечной меры $\nu(\cdot)$ на $\mathcal{A}$. Предположим, что неизвестный параметр θ принадлежит открытому множеству $\Theta \subset \mathsf{R}^1$, содержащему ноль. Обозначим через $\mathsf{P}_{n,\theta}, \mathsf{E}_{n,\theta}$ соответственно распределение и математическое ожидание $\mathbf{X}_n$, а через $\mathsf{P}_\theta, \mathsf{E}_\theta$ соответственно распределение и математическое ожидание X_1.

Пусть мы хотим проверить простую гипотезу

$$\mathsf{H}_0 : \theta = 0 \tag{1.1}$$

против сложной альтернативы $\theta \neq 0$. В общем случае наилучшего (равномерно наиболее мощного) критерия не существует, и поэтому рассмотрим асимптотический подход, при котором $n \to \infty$. Рассмотрим сначала простую альтернативу (θ_1 известно)

$$\mathsf{H}_1 : \theta = \theta_1 \neq 0. \tag{1.2}$$

Заметим, что точка $\theta = 0$ в гипотезе H_0 может быть заменена на любую фиксированную точку $\theta_0 \in \Theta$. Этот случай сводится к предыдущему с помощью рассмотрения семейства плотностей вида $p(x, \theta_0 + \xi)$, где ξ принадлежит некоторой окрестности нуля. Согласно фундаментальной лемме Неймана -Пирсона (см., например, [6], теорема 3.2.1) наилучший (наиболее мощный) критерий основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(l(X_i, \theta) - l(X_i, 0)), \tag{1.3}$$

где $l(x, \theta) = \log p(x, \theta)$, и отвергает гипотезу H_0 в случае, если

$$\Lambda_n(\theta_1) > c_n,$$

причем критическое значение c_n выбирается из условия

$$\mathsf{P}_{n,0}(\Lambda_n(\theta_1) > c_n) = \alpha, \tag{1.4}$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – фиксированный уровень значимости, и мы для простоты предполагаем непрерывность распределения $\Lambda_n(\theta_1)$ при гипотезе H_0, то есть считаем, что

$$\mathsf{P}_{n,0}(\Lambda_n(\theta_1) = c_n) = 0.$$

Далее предположим также, что существуют все необходимые моменты случайных величин $l(X_1, \theta)$ и все необходимые производные по θ функций $l(x, \theta)$.

Обозначим через

$$\mu(\theta) = \mathsf{E}_\theta(l(X_1, \theta) - l(X_1, 0)), \tag{1.5}$$

$$\sigma^2(\theta) = \mathfrak{D}_\theta(l(X_1, \theta) - l(X_1, 0)) \tag{1.6}$$

математическое ожидание и дисперсию случайных величин $l(X_1, \theta) - l(X_1, 0)$ при распределении P_θ.

Поскольку $\Lambda_n(\theta)$ есть сумма независимых одинаково распределенных случайных величин, то согласно центральной предельной теореме имеем при $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\Lambda_n(\theta_1) - n\mu(0)}{\sigma(0)\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathsf{H}_0\right) \to \mathcal{N}(0, 1), \tag{1.7}$$

где $\mathcal{L}(Z \mid \mathsf{H}_i)$ означает распределение Z при гипотезе H_i, $i = 0, 1$, и $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ – нормальный закон с параметрами μ и σ^2. Из соотношения (1.4) теперь следует (поскольку сходимость функций распределения к нормальной функции распределения равномерна), что

$$c_n = \sqrt{n}\sigma(0)u_\alpha + n\mu(0) + o(1), \tag{1.8}$$

где $u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ и $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Обозначим через $\beta_n^*(\theta_1)$ мощность наилучшего критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 (см. (1.1), (1.2)), основанного на $\Lambda_n(\theta_1)$, то есть

$$\beta_n^*(\theta_1) \;=\; \mathsf{P}_{n,\theta_1}(\Lambda_n(\theta_1) \;>\; c_n). \tag{1.9}$$

Покажем, что этот критерий состоятелен, то есть справедлив следующий хорошо известный результат (см., например, [7], теорема 3.3.1). Приведем здесь короткое доказательство этого факта, основанное на неравенстве Иенсена.

Лемма 1.1. *Если* $\sigma^2(0) \;>\; 0,\quad \sigma^2(\theta_1) \;>\; 0$*, то*

$$\beta_n^*(\theta_1) \;\to\; 1, \quad n \to \infty.$$

Доказательство.

Используя опять центральную предельную теорему, получаем

$$\mathcal{L}\left(\frac{\Lambda_n(\theta_1) \;-\; n\mu(\theta_1)}{\sigma(\theta_1)\sqrt{n}} \;\Big|\; \mathsf{H}_1\right) \;\to\; \mathcal{N}(0,1) \tag{1.10}$$

и поэтому с учетом (1.8) для мощности $\beta_n^*(\theta_1)$ имеем представление

$$\beta_n^*(\theta_1) \;=\; \mathsf{P}_{n,\theta_1}(\Lambda_n(\theta_1) \;>\; c_n) \;=\; 1 \;-\; \Phi\left(\frac{c_n \;-\; n\mu(\theta_1)}{\sigma(\theta_1)\sqrt{n}}\right) \;+\; o(1) \;=$$

$$=\; \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu(\theta_1) \;-\; \mu(0)) \;-\; u_\alpha\sigma(0)}{\sigma(\theta_1)}\right) \;+\; o(1). \tag{1.11}$$

Применим теперь неравенство Иенсена (см., например, [3], теорема 4.7.5) к математическим ожиданиям $\mu(\theta_1)$, $\mu(0)$ (см.(1.5)), имеем

$$\mu(0) \;=\; \mathsf{E}_0 \log\frac{p(X_1,\theta_1)}{p(X_1,0)} \;\le\; \log \mathsf{E}_0 \frac{p(X_1,\theta_1)}{p(X_1,0)} \;=\; 0,$$

$$\mu(\theta_1) \;=\; \mathsf{E}_{\theta_1} \log\frac{p(X_1,\theta_1)}{p(X_1,0)} \;=\; -\mathsf{E}_{\theta_1} \log\frac{p(X_1,0)}{p(X_1,\theta_1)} \;\mathfrak{e}\; -\log \mathsf{E}_{\theta_1} \frac{p(X_1,0)}{p(X_1,\theta_1)} \;=\; 0.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\sqrt{n}(\mu(\theta_1) \;-\; \mu(0)) \;\to\; +\infty, \quad n \to \infty,$$

и поэтому в силу формулы (1.11) действительно

$$\beta_n^*(\theta_1) \;\to\; 1, \quad n \to \infty.$$

□

Факт стремления мощности $\beta_n^*(\theta_1)$ к единице, а точнее скорость сходимости к единице, может быть использован для сравнения различных состоятельных критериев (см., например, [7] и обзор, приведенный там). Однако мы здесь рассмотрим несколько иной, асимптотический подход к сравнению различных критериев. Это так называемый подход Питмэна (см. [8]), согласно которому для получения нетривиального предела мощности $\beta_n^*(\theta_1)$, заключенного между α и 1, рассматривают последовательность альтернатив $\theta_1 = \theta_n$, стремящуюся к нулю. Из соотношения (1.11) и центральной предельной теоремы для схемы серий (см., например, [3], теорема 8.4.5) следует, что в регулярном случае для выполнения этого должно быть

$$\mu(\theta_n) - \mu(0) = \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big), \quad \theta_n = \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big). \tag{1.12}$$

Поэтому мы будем рассматривать задачу проверки простой гипотезы H_0 (см. (1.1)) против последовательности сложных близких альтернатив вида

$$\mathsf{H}_{n,1} : \theta = \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad 0 < t \le C, \quad C > 0, \tag{1.14}$$

где параметр t неизвестен. Для любого фиксированного $t \in (0, C]$ наилучший критерий для проверки гипотезы H_0 против простой альтернативы

$$\mathsf{H}_{n,t} : \theta = \frac{t}{\sqrt{n}} \tag{1.14}$$

основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \big(l(X_i, tn^{-1/2}) - l(X_i, 0)\big). \tag{1.15}$$

Обозначим через $\beta_n^*(t)$ мощность такого критерия уровня $\alpha \in (0,1)$. Заметим, что поскольку t неизвестно, то мы не можем использовать статистику $\Lambda_n(t)$ для построения критерия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathsf{H}_{n,1}$. Однако $\beta_n^*(t)$, это так называемая огибающая функция мощности, дает верхнюю границу для мощности любого критерия при проверке гипотезы H_0 против фиксированной альтернативы $\mathsf{H}_{n,t}$, $t > 0$, и может служить стандартом при сравнении различных критериев.

Найдем предельное выражение для $\beta_n^*(t)$. При естественных условиях регулярности формула Тейлора дает

$$l\big(X_i, tn^{-1/2}\big) - l(X_i, 0) = \frac{t}{\sqrt{n}} l^{(1)}(X_i) + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} l^{(2)}(X_i) + \cdots, \tag{1.16}$$

где

$$l^{(j)}(x) = \frac{\partial^j}{\partial\theta^j} l(x, \theta)\Big|_{\theta=0}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому из (1.16) и (1.15) получаем стохастическое разложение для $\Lambda_n(t)$ в виде

$$\Lambda_n(t) = tL_n^{(1)} - \frac{1}{2}t^2 I + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sqrt{n}} L_n^{(2)} + \cdots, \tag{1.17}$$

где

$$L_n^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \big(l^{(j)}(X_i) - \mathsf{E}_0 l^{(j)}(X_i)\big), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и $I = \mathsf{E}_0(l^{(1)}(X_1))^2$ – фишеровская информация. При этом в выражении (1.17) опущены неслучайный член $\frac{1}{6}\frac{t^3}{\sqrt{n}}\mathsf{E}_0 l^{(3)}(X_1)$, члены более высокого порядка малости, чем $n^{-1/2}$, и использован хорошо известный факт, состоящий в том, что

$$\mathsf{E}_0 l^{(1)}(X_1) \;=\; 0, \;\; \mathsf{E}_0 l^{(2)}(X_1) \;=\; -I. \tag{1.18}$$

Критерий, основанный на статистике $\Lambda_n(t)$, отвергает гипотезу H_0 в пользу альтернативы $\mathsf{H}_{n,t}$, если

$$\Lambda_n(t) \;>\; c_{n,t}, \tag{1.19}$$

где критическое значение $c_{n,t}$ выбирается из условия

$$\mathsf{P}_{n,0}(\Lambda_n(t) \;>\; c_{n,t}) \;=\; \alpha. \tag{1.20}$$

Аналогично (1.7), (1.8) из (1.17) следует, что

$$\mathcal{L}\big(\Lambda_n(t)\,|\,\mathsf{H}_0\big) \;\to\; \mathcal{N}\Big(-\frac{1}{2}t^2 I, t^2 I\Big) \tag{1.21}$$

и

$$c_{n,t} \;\to\; c_t \;=\; t\sqrt{I}u_\alpha \;-\; \frac{1}{2}t^2 I. \tag{1.22}$$

Найдем теперь предельное распределение $\Lambda_n(t)$ при альтернативе $\mathsf{H}_{n,t}$. Имеем (см. (1.17))

$$\mathsf{E}_{n,t/\sqrt{n}}\Lambda_n(t) \;=\; t\sqrt{n}\,\mathsf{E}_{t/\sqrt{n}} l^{(1)}(X_1) \;-\; \frac{1}{2}t^2 I +$$

$$+\,\frac{1}{2}t^2\Big(\mathsf{E}_{t/\sqrt{n}} l^{(2)}(X_1) \;-\; \mathsf{E}_0 l^{(2)}(X_1)\Big) \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big) \;=\; \frac{t^2}{2}I \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big), \tag{1.23}$$

$$\mathfrak{D}_{n,t/\sqrt{n}}\Lambda_n(t) \;=\; t^2\mathfrak{D}_{n,t/\sqrt{n}} L_n^{(1)} \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big) \;=\; t^2 I \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big), \tag{1.24}$$

поэтому

$$\mathcal{L}(\Lambda_n(t)\,|\,\mathsf{H}_{n,t}) \;\to\; \mathcal{N}\Big(\frac{1}{2}t^2 I, t^2 I\Big). \tag{1.25}$$

Теперь с учетом (1.22), (1.25) и равенства

$$\beta_n^*(t) \;=\; \mathsf{P}_{n,t/\sqrt{n}}(\Lambda_n(t) \;>\; c_{n,t})$$

имеем

$$\beta_n^*(t) \;\to\; \beta^*(t) \;=\; \Phi\big(t\sqrt{I} \;-\; u_\alpha\big). \tag{1.26}$$

Заметим, что для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathsf{H}_{n,1}$ существуют критерии, основанные на статистиках, отличных от $\Lambda_n(t)$, и имеющие ту же предельную мощность $\beta^*(t)$. Такие критерии называются асимптотически наиболее мощными (АНМ) (точнее, локально АНМ, поскольку альтернатива $\mathsf{H}_{n,1}$ имеет локальный характер). Таковы, например, критерии основанные на статистиках $L_n^{(1)}$, $\Lambda_n(t_0)$, где $t_0 \;>\; 0$ фиксировано, оценках максимального правдоподобия и т.п. Заметим, что все эти статистики не зависят от неизвестного параметра t, и поэтому могут быть использованы при проверке гипотезы H_0 против альтернативы $\mathsf{H}_{n,1}$.

Покажем, например, что критерий, основанный на статистике $L_n^{(1)}$ является АНМ и имеет предельную мощность $\beta^*(t)$. Имеем

$$L_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l^{(1)}(X_i),$$

$$\mathsf{E}_{n,0} L_n^{(1)} \;=\; \sqrt{n}\,\mathsf{E}_0 l^{(1)}(X_1) \;=\; 0,$$
$$\mathfrak{D}_{n,0} L_n^{(1)} \;=\; \mathfrak{D}_0 l^{(1)}(X_1) \;=\; I,$$

поэтому, если

$$\mathsf{P}_{n,0}(L_n^{(1)} \;>\; c_n^{(1)}) \;=\; \alpha \;\in\; (0,1),$$

то для критического уровня $c_n^{(1)}$ (в силу центральной предельной теоремы) имеем

$$c_n^{(1)} \;=\; \sqrt{I} u_\alpha \;+\; o(1). \tag{1.27}$$

Далее

$$\mathsf{E}_{n,t/\sqrt{n}} L_n^{(1)} \;=\; \sqrt{n}\,\mathsf{E}_{t/\sqrt{n}} l^{(1)}(X_1) \;=\; \sqrt{n} \int l^{(1)}(x) p\big(x, tn^{-1/2}\big) d\nu(x) \;=$$
$$=\; tI \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big),$$
$$\mathfrak{D}_{n,t/\sqrt{n}} L_n^{(1)} \;=\; \mathfrak{D}_{t/\sqrt{n}} l^{(1)}(X_1) \;=\; \mathsf{E}_0 (l^{(1)}(X_1))^2 \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big) \;=\; I \;+\; \mathcal{O}\big(n^{-1/2}\big),$$

поэтому для мощности $\beta_n(t)$ критерия, основанного на статистике $L_n^{(1)}$, с учетом (1.27) имеем

$$\beta_n(t) \;=\; \mathsf{P}_{n,t/\sqrt{n}}(L_n^{(1)} \;>\; c_n^{(1)}) \;=\; \Phi\bigg(\frac{tI - c_n^{(1)}}{\sqrt{I}}\bigg) \;+\; o(1) \;=$$
$$=\; \Phi\big(t\sqrt{I} \;-\; u_\alpha\big) \;+\; o(1) \;\to\; \beta^*(t) \;=\; \Phi\big(t\sqrt{I} \;-\; u_\alpha\big). \tag{1.28}$$

Соотношение (1.26) создает естественную основу для асимптотического сравнения различных АНМ критериев, однако, для различения критериев такого рода, то есть удовлетворяющих соотношению

$$\beta_n(t) \;\to\; \beta^*(t), \tag{1.29}$$

где $\beta_n(t)$ – мощность конкретного рассматриваемого критерия, нужны следующие члены асимптотического разложения $\beta_n(t)$, то есть представление типа

$$\beta_n(t) \;=\; \beta^*(t) \;+\; \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(t) \;+\; \frac{1}{n} h_2(t) \;+\; \cdots\,. \tag{1.30}$$

Асимптотическим разложениям в статистике посвящены работы [5] и [10]. Получая формулы типа (1.30) для разлтчных критериев было замечено, что при выполнении естественных условий регулярности для АНМ критериев совпадают и члены $h_1(t)$, различия наступают в членах порядка n^{-1}. Этим вопросам посвящены работы [5], [2], [1]. При этом величина

$$r(t) \;=\; \lim_{n\to\infty} n(\beta_n^*(t) \;-\; \beta_n(t)), \tag{1.31}$$

допускает статистическую интерпретацию в терминах необходимого числа наблюдений и позволяет находить асимптотический дефект (см. [9], [2], [1] и раздел 3, формулы (3.11), (3.12)).

Соотношение (1.30) может быть понято следующим образом. Предположим, что статистику T_n АНМ критерия можно монотонным преобразованием (не меняющим мощности критерия) преобразовать в статистику $S_n(t)$ такую, что величина

$$\Delta_n(t) \equiv S_n(t) - \Lambda_n(t) \to 0, \quad n \to \infty \tag{1.32}$$

по вероятности относительно распределений $\mathsf{P}_{n,0}$ и $\mathsf{P}_{n,t/\sqrt{n}}$. Тогда критерий, основанный на статистике $S_n(t)$, имеет те же предельные распределения при гипотезах H_0 и $\mathsf{H}_{n,t}$, что и критерий, основанный на $\Lambda_n(t)$, и, следовательно, ту же предельную мощность $\beta^*(t)$ (см. (1.26)). Например, в последнем примере

$$T_n = L_n^{(1)},$$

тогда, полагая (см. (1.17))

$$S_n(t) = tT_n - \frac{1}{2}t^2 I,$$

получим

$$\Delta_n(t) = -\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sqrt{n}}L_n^{(2)} + \cdots \to 0. \tag{1.33}$$

В том типичном случае, когда $\Delta_n(t)$, как в (1.32), имеет порядок $n^{-1/2}$, то есть разность между $S_n(t)$ и $\Lambda_n(t)$ имеет тот же порядок, и можно ожидать, что мощность $\beta_n(t)$ критерия, основанного на $S_n(t)$ (или на T_n), отличается от $\beta_n^*(t)$ на величину порядка $n^{-1/2}$. Однако было обнаружено, что для широкого класса АНМ критериев это отличие имеет порядок n^{-1} (см. [2], [1]). Первоначально выражения для $r(t)$ (см. (1.31)) строились с помощью асимптотических разложений для $\beta_n^*(t)$ и $\beta_n(t)$ (см. [5], [9]). Этот подход технически очень трудоемкий и громоздкий. Однако в работах [2], [1] была получена общая формула для величины $r(t)$ без построения асимптотических разложений. Эта формула имеет наглядный вид в терминах условных дисперсий. Для ее демонстрации обозначим через $\Lambda(t)$ нормальную случайную величину вида $\mathcal{N}(-\frac{1}{2}t^2 I, t^2 I)$, тогда в силу (1.21)

$$\mathcal{L}(\Lambda_n(t) \mid \mathsf{H}_0) \to \mathcal{L}(\Lambda(t)), \tag{1.34}$$

и предположим, что при гипотезе H_0 случайный вектор

$$(\sqrt{n}\Delta_n(t),\ \Lambda_n(t)) \tag{1.35}$$

имеет предельное распределение (типичным образом двумерное нормальное), совпадающее с распределением вектора

$$(\Delta(t),\ \Lambda(t)), \tag{1.36}$$

тогда в работах [2], [1] показано, что

$$r(t) = \frac{1}{2t\sqrt{I}}\varphi(u_\alpha - t\sqrt{I})\,\mathfrak{D}(\Delta(t) \mid \Lambda(t) = c_t), \tag{1.37}$$

где $c_t = t\sqrt{I}u_\alpha - \frac{1}{2}t^2 I$ и $\varphi(x) = \Phi'(x)$. Например, для критерия, основанного на статистике $T_n = L_n^{(1)}$ в работе [1] (формула 1.4.10) получено выражение

$$r(t) = \frac{t^3}{8\sqrt{I}}\varphi(u_\alpha - t\sqrt{I})(\mathfrak{D}_0 l^{(2)}(X_1) - I^{-1}\mathsf{E}_0^2 l^{(1)}(X_1) l^{(2)}(X_1)).$$

В работе [1] рассмотрен общий случай в терминах общего статистического эсперимента и приведена общая теорема ([1], теорема 3.2.1), дающая достаточные условия для существования предела

$$r = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{-2}(\beta_n^* - \beta_n) = \frac{1}{2}e^b p(b)\, \mathfrak{D}(\Delta \mid \Lambda = b), \tag{1.38}$$

где $b = \Phi_1^{-1}(1 - \alpha)$, $\Phi_1(x)$ – функция распределения, предельная для логарифма отношения правдоподобия Λ_n при гипотезе H_0 (выше было $\Phi_1(x) = \Phi\Big(\frac{x+\frac{1}{2}t^2 I}{t\sqrt{I}}\Big)$), $p(x) = \Phi_1'(x)$ и $\tau_n \to 0$ – малый параметр (выше было $\tau_n = n^{-1/2}$), (Δ, Λ) – случайный вектор, предельный для $(\tau_n^{-1}\Delta_n, \Lambda_n)$, $\Delta_n = S_n - \Lambda_n$, S_n – монотонное преобразование статистики критерия T_n.

Цель настоящей статьи - привести пример, когда в формуле (1.38) $\tau_n \neq n^{-1/2}$. С этой целью будет рассмотрено распределение Лапласа с параметром сдвига и на эвристическом уровне показано, что в этом случае $\tau_n = n^{-1/4}$.

2. Распределение Лапласа

Как известно, распределение Лапласа имеет плотность

$$p(x, \theta) = \frac{1}{2}e^{-|x - \theta|}, \quad x, \theta \in \mathsf{R}^1 \tag{2.1}$$

и широко применяется в прикладной статистике (см. [4] и литературу там). Заметим, что это семейство не является регулярным, поскольку у $p(x,\theta)$ не существует производной по θ в точке $\theta = x$. Это отсутствие регулярности приводит к нарушению естественного порядка n^{-1} разности $\beta_n^*(t) - \beta_n(t)$ и приводит к порядку $n^{-1/2}$. Факт нарушения обычных порядков при сравнении оценок в случае распределения Лапласа был отмечен в работе [5] (стр.34). При этом там была ссылка на работу [11], в которой на эвристическом уровне построено асимптотическое разложение для оценок максимального правдоподобия. Строгое доказательство для таких оценок дано в работе [4]. Мы рассмотрим здесь АНМ критерий, основанный на знаковой статистике, и получим на эвристическом уровне без привлечения асимптотических разложений формулу для $r(t)$ с помощью общей теоремы 3.2.1 из работы [1]. Формальное доказательство полученной формулы для $r(t)$ (см. (3.1)), состоящее в проверке условий этой теоремы, будет приведено в другой статье.

Докажем лемму об асимптотическом поведении логарифма отношения правдоподобия $\Lambda_n(t) \equiv \Lambda_n(tn^{-1/2})$ (см. (1.3), (1.15)) в случае распределения Лапласа. Эта лемма может быть доказана с помощью центральной предельной теоремы для схемы серий (см. [3], теорема 8.4.5), однако мы докажем её прямыми методами с помощью характеристических функций.

Лемма 2.1. *В случае распределения Лапласа (2.1) справедливы следующие соотношения: фишеровская информация равна 1, то есть* $I = 1$,

$$\mathcal{L}(\Lambda_n(t) \mid \mathsf{H}_0) \to \mathcal{N}\Big(-\frac{t^2}{2}, t^2\Big),$$

$$\mathcal{L}(\Lambda_n(t) \mid \mathsf{H}_{n,t}) \to \mathcal{N}\Big(\frac{t^2}{2}, t^2\Big),$$

и поэтому

$$\beta_n^*(t) \to \beta^*(t) = \Phi(t - u_\alpha), \quad n \to \infty.$$

Доказательство.

В силу свойств интеграла Лебега

$$I = \int\limits_{\mathsf{R}^1 \setminus \{0\}} p(x) \left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)^2 dx = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Рассмотрим логарифм отношения правдоподобия $\Lambda_n(\theta),\ \theta > 0$ более подробно.

$$\Lambda_n(\theta) = \sum_{i=1}^n (l(X_i,\theta) - l(X_i,0)) = \sum_{i=1}^n (|X_i| - |X_i - \theta|) \equiv \sum_{i=1}^n Z_i(\theta), \tag{2.2}$$

где

$$Z_i(\theta) = \begin{cases} \theta, & X_i > \theta \\ 2X_i - \theta, & 0 \le X_i \le \theta \\ -\theta, & X_i < 0 \end{cases} =$$

$$= 2X_i\, \mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_i) + 2\theta\, \mathbf{1}_{(\theta,\infty)}(X_i) - \theta \tag{2.3}$$

и $\mathbf{1}_A(\cdot)$ - индикатор множества A.

Найдем характеристические функции случайной величины $Z_1(\theta)$ при распределениях P_0 и P_θ. Имеем

$$f_0(s) \equiv \mathsf{E}_0\, e^{isZ_1(\theta)} = e^{is\theta}\, \mathsf{P}_0(X_1 > \theta) + e^{-is\theta} \mathsf{P}_0(X_1 < 0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^\theta e^{is(2x-\theta)} e^{-x} dx = \frac{is(e^{\theta(is-1)} + e^{-is\theta}) - e^{-is\theta}}{2is - 1}, \tag{2.4}$$

$$f_\theta(s) \equiv \mathsf{E}_\theta\, e^{isZ_1(\theta)} = \mathsf{E}_0\, e^{is(|X_1+\theta| - |X_1|)} =$$

$$= e^{is\theta}\, \mathsf{P}_0(X_1 > 0) + e^{-is\theta}\, \mathsf{P}_0(X_1 < -\theta) + \frac{1}{2} \int\limits_{-\theta}^0 e^{is(2x+\theta)} e^x dx =$$

$$= \frac{is(e^{-\theta(is+1)} + e^{is\theta}) + e^{is\theta}}{2is + 1}. \tag{2.5}$$

В случае близких альтернатив $\theta = \theta_n \to 0$ из этих соотношений следует, что при каждом фиксированном s

$$f_0(s) = 1 + \frac{is(is - 1)\, \theta_n^2}{2} + o(\theta_n^2), \quad f_{\theta_n}(s) = 1 + \frac{is(is + 1)\, \theta_n^2}{2} + o(\theta_n^2), \tag{2.6}$$

$$\mu(0) \;=\; \mathsf{E}_0\, Z_1(\theta_n) \;=\; -\frac{\theta_n^2}{2} \;+\; o(\theta_n^2), \qquad \mu(\theta_n) \;=\; \mathsf{E}_{\theta_n}\, Z_1(\theta_n) \;=\; \frac{\theta_n^2}{2} \;+\; o(\theta_n^2), \quad (2.7)$$

$$\sigma^2(0) \;=\; \mathfrak{D}_0\, Z_1(\theta_n) \;=\; \theta_n^2 \;+\; o(\theta_n^2), \qquad \sigma^2(\theta_n) \;=\; \mathfrak{D}_{\theta_n}\, Z_1(\theta_n) \;=\; \theta_n^2 \;+\; o(\theta_n^2). \quad (2.8)$$

Теперь, если $\theta_n \;=\; \frac{t}{\sqrt{n}}$, то для любого фиксированного s имеем

$$\mathsf{E}_{n,0}\, e^{is\Lambda_n(t)} \;=\; f_0^n(s) \;=\; \left(1 \;+\; \frac{is(is \;-\; 1)t^2}{2n} \;+\; o\big(n^{-1}\big)\right)^n \;\to$$

$$\to\; \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}(s^2 \;+\; is)\Big\}, \quad n \;\to\; \infty. \qquad (2.9)$$

Аналогично

$$\mathsf{E}_{n,tn^{-1/2}}\, e^{is\Lambda_n(t)} \;=\; f_{tn^{-1/2}}^n(s) \;\to\; \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}(s^2 \;-\; is)\Big\}, \quad n \;\to\; \infty. \qquad (2.10)$$

Отсюда и из теоремы непрерывности (см., например, [3], теорема 7.3.2) следует утверждение леммы. □

Замечание 2.1.

Заметим, что утверждения леммы 2.1 являются прямыми следствиями теоремы 12.2.3 и примера 12.3.12 из книги [6], поскольку для распределения Лапласа функция

$$\sqrt{p(x,\theta)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|x-\theta|}{2}}$$

дифференцируема в нуле в среднеквадратичном (см. определение 12.2.1,[6]) со среднеквадратичной производной в нуле равной

$$\eta(x,0) \;\equiv\; \frac{1}{2^{3/2}}e^{-\frac{|x|}{2}}sign(x),$$

то есть при $\theta \;\to\; 0+0$ справедливо представление

$$\int \big(\sqrt{p(x,\theta)} \;-\; \sqrt{p(x,0)} \;-\; \eta(x,0)\theta\big)^2 dx \;=\; o(\theta^2).$$

В самом деле, левая часть этого равенства имеет вид

$$\frac{1}{2}\Big(e^{\frac{\theta}{2}} \;-\; 1 \;-\; \frac{\theta}{2}\Big)^2 \int\limits_{\theta}^{\infty} e^{-x}dx \;+\; \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{\theta}{2}} \;-\; 1 \;+\; \frac{\theta}{2}\Big)^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}dx \;+$$

$$+\,\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\theta} e^{-x}\Big(e^{x-\theta/2} \;-\; 1 \;-\; \frac{\theta}{2}\Big)^2 dx.$$

Первые два слагаемых в этом соотношении есть $o(\theta^2)$, а в третьем слагаемом, интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{2}\Big(e^{-\theta/2} \;-\; 1 \;-\; \frac{\theta}{2}\Big)^2 \;-\; \frac{1}{2}e^{-\theta}\Big(e^{\theta/2} \;-\; 1 \;-\; \frac{\theta}{2}\Big)^2 \;+$$

$$+\int_0^\theta e^{-\theta/2}\Big(e^{x-\theta/2} - 1 - \frac{\theta}{2}\Big)dx = \frac{1}{2}\Big(e^{-\theta/2} - 1 - \frac{\theta}{2}\Big)^2 + 1 - e^{-\theta} -$$

$$- e^{-\theta/2}\Big(\theta + \frac{\theta^2}{2}\Big) + o(\theta^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\theta^2 + \theta - \frac{\theta^2}{2} - \Big(\theta + \frac{\theta^2}{2}\Big) + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) = o(\theta^2).$$

Таким образом, условие дифференцируемости в среднеквадратичном выполнено. □

Эта лемма показывает, что отсутствие дифференцируемости по θ функции $p(x,\theta)$ (см. (2.1)) в точке $\theta = x$ качественно не влияет на порядок альтернатив θ_n (равный $n^{-1/2}$) и вид предельной мощности $\beta^*(t)$.

3. Формула для предельного отклонения мощностей

В этом разделе на эвристическом уровне будет показано, что справедлива формула (см. (1.37) и (1.38))

$$r(t) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\beta_n^*(t) - \beta_n(t)) = \frac{t^2}{3}\varphi(u_\alpha - t), \tag{3.1}$$

где $\beta_n(t)$ функция мощности АНМ критерия, основанного на знаковой статистике

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n sign(X_i). \tag{3.2}$$

Формула (3.1) показывает, что отсутствие регулярности у распределения Лапласа приводит к нарушению естественного порядка разности $\beta_n^*(t) - \beta_n(t)$ (равного n^{-1} (см. (1.31)). Из формулы (3.1) также следует, что этот порядок равен $n^{-1/2}$.

Получим сначала стохастическое разложение для $\Lambda_n(t)$. Имеем (см. (2.2), (2.3)),

$$\Lambda_n(t) = t\sqrt{n} + 2\sum_{i=1}^n (X_i - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_i) - \frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(X_i) =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,\infty)}(X_i) - \frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(X_i) + 2\sum_{i=1}^n (X_i - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_i) =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n sign(X_i) + \frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{0\}}(X_i) + 2\sum_{i=1}^n (X_i - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_i).$$

Поскольку распределение X_i непрерывно, то

$$\mathsf{P}_{n,\theta}\Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{0\}}(X_i) > 0\Big) = 0, \quad \theta > 0,$$

и поэтому почти всюду справедливо представление

$$\Lambda_n(t) = \frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} sign(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n} (X_i - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_i). \tag{3.3}$$

Рассмотрим следующее монотонное преобразование ($t > 0$) статистики T_n (см. (3.2))

$$S_n(t) = tT_n - \frac{1}{2}t^2,$$

тогда (см. (1.32), (1.33))

$$\Delta_n(t) = S_n(t) - \Lambda_n(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (X_i - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_i). \tag{3.4}$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 3.1. *Для распределения Лапласа (2.1) справедливы следующие соотношения*

$$\mathcal{L}(\sqrt[4]{n}\Delta_n(t) \,|\, \mathsf{H}_0) \to \mathcal{N}\Big(0, \frac{2t^3}{3}\Big),$$

$$\mathcal{L}((\sqrt[4]{n}\Delta_n(t), \Lambda_n(t)) \,|\, \mathsf{H}_0) \to \mathcal{N}_2\Big(0, \frac{2t^3}{3}, 0, -\frac{t^2}{2}, t^2\Big),$$

где $\mathcal{N}_2$ - двумерный нормальный закон с соответствующими параметрами.

Доказательство.

Докажем первое соотношение с помощью характеристических функций. С этой целью найдем характеристическую функцию случайной величины

$$(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1), \quad \theta > 0.$$

Имеем,

$$g_\theta(s) \equiv \mathsf{E}_0 e^{is(X_1-\theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)} = \mathsf{P}_0(X_1 < 0) + \mathsf{P}_0(X_1 > \theta) + \frac{1}{2}\int_0^\theta e^{is(x-\theta)}e^{-x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{-\theta}) + \frac{e^{-\theta} - e^{-is\theta}}{2(is - 1)}. \tag{3.5}$$

Если $\theta = \theta_n \to 0$, то из (3.5) следует, что при каждом фиксированном s справедливо представление

$$g_{\theta_n}(s) = 1 - \frac{is\theta_n^2}{4} + \frac{is(is+1)\theta_n^3}{12} + o(\theta_n^3 + \theta_n^4 s^3), \tag{3.6}$$

поэтому

$$\mathsf{E}_{n,0}e^{is\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)} = e^{-is\sqrt[4]{n}\,\frac{t^2}{2}}\, g^n_{tn^{-1/2}}(-2\sqrt[4]{n}s) =$$

$$= \exp\Big\{-\frac{is\sqrt[4]{n}t^2}{2} + n\log\Big(1 + \frac{ist^2}{2n^{\frac{3}{4}}} - \frac{it^3 s\sqrt[4]{n}(1 - 2is\sqrt[4]{n})}{6n^{\frac{3}{2}}} + o\big(n^{-1}\big)\Big)\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{-\frac{t^3 s^2}{3} + o(1)\Big\} \to e^{-\frac{t^3 s^2}{3}}, \tag{3.7}$$

отсюда следует первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение также методом характеристических функций, хотя его можно доказать с помощью двумерной центральной предельной теоремы для схемы серий (см., например, [3], теорема 8.7.11). С этой целью найдем двумерную характеристическую функцию случайных величин (см. (3.3), (3.4))

$$\big((X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1),\ \theta sign(X_1) + 2(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)\big),\ \ \theta > 0.$$

Имеем

$$g_\theta(u,v) \equiv \mathsf{E}_0 \exp\Big\{iu(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1) + iv\big(\theta sign(X_1) + 2(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)\big)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-iv\theta}e^{x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\infty} e^{iv\theta}e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\theta} e^{iu(x-\theta)+iv(2x-\theta)}e^{-x}dx =$$

$$= \frac{e^{-iv\theta} + e^{\theta(iv-1)}}{2} + \frac{e^{\theta(iv-1)} - e^{-i\theta(u+v)}}{2(iu + 2iv - 1)}. \tag{3.8}$$

Поэтому при $\theta = \theta_n \to 0$ и фиксированных (u,v) имеем асимптотическое представление

$$g_{\theta_n}(u,v) =$$

$$= \frac{1 - iv\theta_n + \frac{(iv\theta_n)^2}{2} - \frac{(iv\theta_n)^3}{6} + \cdots}{2} +$$

$$+ \frac{1 + (iv-1)\theta_n + \frac{((iv-1)\theta_n)^2}{2} + \frac{((iv-1)\theta_n)^3}{6} + \cdots}{2} +$$

$$+ \frac{1 + (iv-1)\theta_n + \frac{((iv-1)\theta_n)^2}{2} + \frac{((iv-1)\theta_n)^3}{6} + \cdots}{2(iu + 2iv - 1)} -$$

$$- \frac{1 - i(v+u)\theta_n + \frac{((v+u)i\theta_n)^2}{2} - \frac{((v+u)i\theta_n)^3}{6} + \cdots}{2(iu + 2iv - 1)}.$$

Отсюда после несложных преобразований имеем

$$g_{\theta_n}(u,v) = 1 - \frac{\theta_n^2}{4}(2v^2 + iu + 2iv) + \frac{\theta_n^3}{12}(2v^2 - u^2 - uv + i(2v+u)) + \cdots. \tag{3.9}$$

Теперь (см. (3.3), (3.4))

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \exp\{\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)iu + \Lambda_n(t)iv\} = e^{-\frac{1}{2}t^2 iu\sqrt[4]{n}}\, g^n_{tn^{-1/2}}(-2\sqrt[4]{n}u, v) =$$

$$= \exp\bigg\{-\frac{t^2 iu\sqrt[4]{n}}{2} + n\log\bigg(1 - \frac{t^2(-2\sqrt[4]{n}iu + 2v^2 + 2iv)}{4n} +$$

$$+ \frac{t^3(2\sqrt[4]{n}vu + 2v^2 + 2iv - 4\sqrt{n}u^2)}{12n^{3/2}} + \cdots\bigg)\bigg\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(iv+v^2) - \frac{t^3}{3}u^2 + o(1)\right\} \to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(iv+v^2) - \frac{t^3}{3}u^2\right\}.$$

Отсюда и из многомерной теоремы непрерывности (см. [3], теорема 7.6.2А)) следует утверждение леммы. □

Из этой леммы следует, что случайные величины $\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)$ и $\Lambda_n(t)$ асимптотически независимы, и поэтому формула для $r(t)$ (см. (1.38)) с $\tau_n = n^{-1/4}$ приобретает вид (см. (1.37), (3.1))

$$r(t) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\beta_n^*(t) - \beta_n(t)) =$$

$$= \frac{1}{2t}\varphi(u_\alpha - t)\mathfrak{D}(\Delta(t) \,|\, \Lambda(t) = c_t) == \frac{1}{2t}\varphi(u_\alpha - t)\mathfrak{D}\Delta(t) = \frac{t^2}{3}\varphi(u_\alpha - t), \quad (3.10)$$

где $\Lambda(t)$, $\Delta(t)$ независимые нормальные случайные величины соответственно с параметрами $(-\frac{t^2}{2}, t^2)$ и $(0, \frac{2t^3}{3})$.

Найдем теперь асимптотическое представление для дефекта (см. [9], [1], стр. 40) критерия, основанного на статистике T_n (см. (3.2)). Напомним, что дефект d_n определяется как разность $k_n - n$, где k_n число наблюдений, необходимых критерию, основанному на статистике T_n для достижения той же мощности, что и критерий, основанный на $\Lambda_n(t)$, при одинаковых альтернативах $tn^{-1/2}$. Предполагая, что d_n непрерывная переменная, получаем равенство для её определения

$$\beta_n^*(t) = \beta_{k_n}(t\sqrt{k_n n^{-1}}). \quad (3.11)$$

Из лемм 2.1, 2.2 и формулы (3.10) следует, что для мощностей $\beta_n^*(t)$ и $\beta_n(t)$ справедливы представления

$$\beta_n^*(t) = \Phi(t - u_\alpha) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha)h^*(t) + o(n^{-1/2}),$$

$$\beta_n(t) = \Phi(t - u_\alpha) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha)h(t) + o(n^{-1/2}),$$

где $h^*(t)$ и $h(t)$ некоторые полиномы по t и u_α. Из этих соотношений и равенства (3.11) следует, что $k_n \to \infty$, $\frac{k_n}{n} \to 1$ и

$$d_n = \sqrt{n}\,\frac{2(h^*(t) - h(t))}{t} + o(\sqrt{n}) =$$

$$= \sqrt{n}\,\frac{2r(t)}{t\varphi(u_\alpha - t)} + o(\sqrt{n}) = \sqrt{n}\,\frac{2t}{3} + o(\sqrt{n}). \quad (3.12)$$

Таким образом, в отличие от регулярного случая, в котором $d_n \to d < \infty$ (см.[1], [2]), то есть существует конечный асимптотический дефект, здесь дефект d_n стремится к бесконечности со скоростью $\sqrt{n}$.

В этой работе вместо формулы (3.10) будет доказано более слабое утверждение, составляющее содержание следующей леммы. Техника, используемая в доказательстве этой леммы, будет затем использована для доказательства формулы (3.10).

Лемма 3.2. *В случае распределения Лапласа (2.1) для любого* $0 \le \delta < \frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$n^{\delta}(\beta_n^*(t) - \beta_n(t)) \to 0, \quad n \to \infty, \quad 0 < t \le C, \quad C > 0.$$

Доказательство.

Для доказательства применим общую теорему из работы [12]. Условия этой теоремы в нашем случае сводятся к проверке следующих соотношений: существует константа $A > 0$ такая, что для любого $x_0 \in \mathsf{R}^1$, любого $\gamma > 0$ и любого $t \in (0, C]$, $C > 0$ справедливы равенства

$$\sup_{x \le x_0} \mathsf{P}_{n,0}(x - n^{-\delta/2} \le \Lambda_n(t) \le x) = \mathcal{O}(n^{-\delta/2}), \tag{3.13}$$

$$\mathsf{E}_{n,0}|\Delta_n(t)|\, \mathbf{1}_{(\gamma n^{-\delta/2}, A)}(|\Delta_n(t)|) = o(n^{-\delta}), \tag{3.14}$$

$$\mathsf{P}_{n,0}(\Delta_n(t) \,\mathfrak{e}\, A) = o(n^{-\delta}), \tag{3.15}$$

$$\mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}(\Delta_n(t) \le -A) = o(n^{-\delta}). \tag{3.16}$$

Найдем сначала выражения для $\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n(t)$, $\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2(t)$. Из соотношения (3.4) непосредственно получаем

$$\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n(t) = -\frac{t^2}{2} - 2n\, \mathsf{E}_0(X_1 - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_1), \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2(t) &= \mathfrak{D}_{n,0}\Delta_n(t) + (\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n(t))^2 = \\ &= 4n\, \mathfrak{D}_0(X_1 - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_1) + (\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n(t))^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Отсюда видно, что достаточно найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)$. Для нее было получено выражение для характеристической функции (см. (3.5)) $g_\theta(s)$. Дифференцируя функцию $g_\theta(s)$ по s, получаем

$$\mathsf{E}_0(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1) = \frac{g_\theta^{(1)}(0)}{i} = \frac{1}{2}(1 - \theta - e^{-\theta}), \tag{3.19}$$

$$\mathsf{E}_0(X_1 - \theta)^2\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1) = -g_\theta^{(2)}(0) = \frac{\theta^2}{2} + (1 - \theta - e^{-\theta}). \tag{3.20}$$

Полагая в выражениях (3.19), (3.20) $\theta = tn^{-1/2}$ из (3.17), (3.18), получаем

$$\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n(t) = -\frac{t^2}{2} - n\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^3}{6\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}), \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2(t) &= 4n\left(\frac{t^2}{2n} + 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\big(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\big)^2\right) + \\ &+ \left(\frac{t^2}{2} + n\big(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\big)\right)^2 = \frac{2t^3}{3\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Теперь соотношение (3.15) следует из неравенства Чебышева, поскольку при $0 \le \delta < 1/2$ из (3.22) получаем, что

$$\mathsf{P}_{n,0}(\Delta_n(t)\,\mathfrak{e}\,A) \;\le\; \frac{\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2(t)}{A^2} \;=\; \mathcal{O}(n^{-1/2}) \;=\; o(n^{-\delta}). \tag{3.23}$$

Для проверки соотношения (3.16) найдем характеристическую функцию случайной величины $(X_1-\theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)$ при альтернативе θ. Имеем

$$\mathsf{E}_\theta e^{is(X_1-\theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)} \;=\; \mathsf{E}_0 e^{isX_1\mathbf{1}_{[-\theta,0]}(X_1)} \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\int_{-\theta}^{0} e^{ixs}e^{x}dx \;+\; \mathsf{P}_0(X_1\;>\;0)\;+\;\mathsf{P}_0(X_1\;<\;-\theta)\;=$$

$$=\; \frac{1\;-\;e^{-\theta(is+1)}}{2(is\;+\;1)} \;+\; \frac{1}{2}(1\;+\;e^{-\theta}). \tag{3.24}$$

Дифференцируя это выражение по s, получим

$$\mathsf{E}_\theta(X_1-\theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1) \;=\; \frac{\theta e^{-\theta}\;-\;1\;+\;e^{-\theta}}{2}, \tag{3.25}$$

$$\mathsf{E}_\theta(X_1-\theta)^2\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1) \;=\; 1\;-\;e^{-\theta}\;-\;\theta e^{-\theta}\;-\;\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\theta}. \tag{3.26}$$

Полагая здесь $\theta = tn^{-1/2}$, аналогично (3.21), (3.22) получим

$$\mathsf{E}_{n,tn^{-1/2}}\Delta_n(t) \;=\; -\frac{t^2}{2} - n\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t/\sqrt{n}} - 1 + e^{-t/\sqrt{n}}\Big) \;=\; -\frac{t^3}{3\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}), \tag{3.27}$$

$$\mathsf{E}_{n,tn^{-1/2}}\Delta_n^2(t) \;=$$

$$=\; 4n\Big(1 - e^{-t/\sqrt{n}} - \frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t/\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n}e^{-t/\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\big(\frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t/\sqrt{n}} - 1 + e^{-t/\sqrt{n}}\big)^2\Big) +$$

$$+\Big(\frac{t^2}{2}\;+\;n\,\big(\frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t/\sqrt{n}}\;-\;1\;+\;e^{-t/\sqrt{n}}\big)\Big)^2 \;=\; \frac{2t^3}{3\sqrt{n}} \;+\; \mathcal{O}(n^{-1}). \tag{3.28}$$

Из этого соотношения, аналогично (3.23), для (3.16) получаем

$$\mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}(\Delta_n(t)\;\le\;-A) \;\le\; \mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}(|\Delta_n(t)|\,\mathfrak{e}\,A) \;\le$$

$$\le\; \frac{\mathsf{E}_{n,tn^{-1/2}}\Delta_n^2(t)}{A^2} \;=\; \mathcal{O}(n^{-1/2}) \;=\; o(n^{-\delta}). \tag{3.29}$$

Докажем теперь соотношение (3.14). С этой целью запишем характеристическую функцию случайной величины $\Delta_n(t)$ в виде (см. (3.4), (3.5), полагаем $\theta = tn^{-1/2}$)

$$\mathsf{E}_{n,0}e^{is\Delta_n(t)} \;=\; e^{-ist^2/2}\,g_\theta^n(-2s) \;=$$

$$=\; \exp\Big\{-\frac{ist^2}{2} \;+\; n\log\Big(\frac{1}{2}(1\;+\;e^{-\theta})\;-\;\frac{e^{-\theta}\;-\;e^{2is\theta}}{2(2is+1)}\Big)\Big\} \;=$$

$$= \exp\Big\{-\frac{ist^2}{2} + n\log\Big(\frac{1}{2} + \frac{2ise^{-\theta} + e^{2is\theta}}{2(2is+1)}\Big)\Big\}. \tag{3.30}$$

Найдем $\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^4(t)$. С этой целью вычислим коэффициент при s^4 в выражении (3.30). Учитывая разложение

$$\frac{1}{1+2is} = 1 - 2is + (2is)^2 - \cdots,$$

получим, что выражение (3.30) приобретает вид

$$\mathsf{E}_{n,0}e^{is\Delta_n(t)} = \exp\Big\{-\frac{ist^2}{2} + n\log\Big(1 + \frac{1}{2}\big(2is(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6} + \cdots) +$$

$$+ \frac{(2is\theta)^2}{2} + \frac{(2is\theta)^3}{6} + \frac{(2is\theta)^4}{24} + \cdots\big)\big(1 - 2is + (2is)^2 - \cdots\big)\Big)\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{-\frac{ist^2}{2} + n\log\Big(1 + is(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6} + \cdots) + (is)^2(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^4}{12} + \cdots) +$$

$$+ (is)^3(\frac{\theta^4}{6} - \cdots) + (is)^4(\frac{\theta^5}{15} - \cdots)\Big)\Big\}. \tag{3.31}$$

Из этого соотношения видно, что

$$\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^4(t) = \mathcal{O}(n^{-3/2}). \tag{3.32}$$

Теперь для доказательства (3.14) применим (3.32) и неравенство

$$\mathsf{E}_{n,0}|\Delta_n(t)|\,\mathbf{1}_{(\gamma n^{-\delta/2},\,A)}(|\Delta_n(t)|) = \mathsf{E}_{n,0}\frac{(\Delta_n(t))^4}{|\Delta_n(t)|^3}\,\mathbf{1}_{(\gamma n^{-\delta/2}\,A)}(|\Delta_n(t)|) \le$$

$$\le \frac{1}{\gamma^3 n^{-3\delta/2}}\mathsf{E}_{n,0}(\Delta_n(t))^4 = \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}+\frac{3\delta}{2}}) = o(n^{-\delta}), \tag{3.33}$$

поскольку $0 \le \delta < 1/2$.

Осталось доказать соотношение (3.13). Для его доказательства применим неравенство Берри-Эссеена (см. [3], приложение 5, стр. 449). Из соотношений (3.3), (3.19), (3.20) получаем

$$\mu_n \equiv \mathsf{E}_{n,0}\Lambda_n(t) = n\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \tag{3.34}$$

$$\sigma_n^2 \equiv \mathfrak{D}_{n,0}\Lambda_n(t) = n\,\mathfrak{D}_0\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}sign(X_1) + 2(X_1 - tn^{-1/2})\,\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_1)\Big) =$$

$$= n\,\mathsf{E}_0\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}sign(X_1) + 2(X_1 - tn^{-1/2})\,\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_1)\Big)^2 - n\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\right)^2 =$$

$$= t^2 + 4t\sqrt{n}\,\mathsf{E}_0\big(X_1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\big)\,\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_1) + 4n\left(\frac{t^2}{2n} + 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}(n^{-1}) =$$

$$= 3t^2 + 2t\sqrt{n}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\right) + 4n\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}(n^{-1}) =$$

$$= t^2 + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \tag{3.35}$$

Теперь в силу неравенства Бэрри-Эссеена и (3.34), (3.35) имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}\big(x - n^{-\delta/2} \le \Lambda_n(t) \le x\big) \le \left|\mathsf{P}_{n,0}\big(\Lambda_n(t) \le x\big) - \Phi\Big(\frac{x - \mu_n}{\sigma_n}\Big)\right| +$$

$$+\left|\mathsf{P}_{n,0}\big(\Lambda_n(t) < x - n^{-\delta/2}\big) - \Phi\Big(\frac{x - n^{-\delta/2} - \mu_n}{\sigma_n}\Big)\right| +$$

$$+\left|\Phi\Big(\frac{x - \mu_n}{\sigma_n}\Big) - \Phi\Big(\frac{x - n^{-\delta/2} - \mu_n}{\sigma_n}\Big)\right| \le$$

$$\le \frac{c}{\sqrt{n}\sigma_n^{3/2}}\,\mathsf{E}_0\left|sign(X_1) + \sqrt{n}2(X_1 - tn^{-1/2})\,\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_1)\right|^3 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n n^{\delta/2}} =$$

$$= \mathcal{O}(n^{-1/2}) + \mathcal{O}(n^{-\delta/2}) = \mathcal{O}(n^{-\delta/2}). \tag{3.36}$$

Лемма доказана. □

Список литературы

[1] Bening V. E., Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses. – VSP, Utrecht, 2000, 277 p.

[2] Чибисов Д. М., Вычисление дефекта асимптотически эффективных критериев. – Теория вероятностей и ее применения, 1985, т. 30, вып. 2, стр. 269 – 288.

[3] Боровков А. А., Теория вероятностей. – М.: УРСС, 2003, 470 стр.

[4] Бурнашев М. В., Асимптотические разложения для медианной оценки параметра. – Теория вероятностей и ее применения, 1996, т. 41, вып. 4, стр. 738 – 753.

[5] Pfanzagl J., Asymptotic expansions in parametric statistical theory.– in: Developments in Statistics, Ed. by P.R. Krishnaiah, New York-London, Academic Press, 1989, v.3, p. 1 – 97.

[6] Lehmann E. L., Romano J. P. Testing Statistical Hypotheses, Third edition. – Springer, 2005, 784 p.

[7] Никитин Я. Ю., Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. – М.: Наука, 1995, 250 стр.

[8] Pitman E. J. G., Lecture notes on nonparametric statistical inference, Lectures given for the University of North Carolina, Institute of Statistics, 1948.

[9] Hodges J. L., Lehmann E. L., Deficiency. – Ann.Math.Statist., 1970, v.41, n.5, p. 783 – 801.

[10] Bickel P. J., Edgeworth expansions in nonparametric statistics. – Ann. of Statist., 1974, v.2, n.1, p. 1 – 20.

[11] Takeuchi K., Asymptotic Theory of Statistical Estimation. – 1974, Tokyo (in Japanese).

[12] Bickel P. J., Chibisov D. M., Van Zwet W. R., On efficiency of first and second order. – Intern. Statist. Review, 1981, v.49, p. 169 – 175.