

УДК 519.711

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Цветкова Е.Г.

Тверской государственный университет

Поступила в редакцию 14.06.2008, после переработки 26.08.2008.

В работе рассматривается решение задачи о построении выпуклого тела вращения максимальной площади поверхности с заданными ограничениями на ширину методами нелинейного программирования. Производится сравнение эффективности численных методов и различных видов дискретной аппроксимации в решении данной задачи. Приводятся расчетные формулы, используемые в методах построения численного решения.

The task about the construction of a convex rotary figure, having the maximum area of a surface and given restrictions on width, is considered in this work. This task is solved by the methods of nonlinear programming. The comparison of the different numeral methods and different kinds of approximation are given in this work. The formulas for the finding of the numeric decision of the given task are produced in this work.

Ключевые слова: оптимальное управление, двойственный метод, выпуклые фигуры, опорная функция.

Keywords: optimal control, dual method, convex figures, support function.

Введение

Задачи о построении оптимальных пространственных фигур состоят в нахождении поверхностей и тел, имеющих максимальную или минимальную площадь поверхности либо максимальный или минимальный объем при заданных ограничениях на ширину фигуры. Подобные задачи имеют широкую область приложения не только в самой геометрии, но и в других науках, а также практическое применение. Они возникают в задачах упаковки тел и раскроя. Эти задачи могут быть формализованы как задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. В решении данных задач эффективны методы математической теории оптимального управления, в частности, двойственный метод [1],[2]. В работе [5] приведено аналитическое решение задачи о нахождении фигуры вращения максимальной площади поверхности без дополнительных ограничений на ширину. Используемый при этом двойственный метод не позволяет получить

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ НШ-5073.2008.1.

решение задачи максимизации площади с несколькими дополнительными ограничениями на ширину фигуры. Кроме того, многие экстремальные геометрические задачи с дополнительными ограничениями не всегда могут быть решены аналитически, в то время как применение программных средств позволяют получить их численное решение. В данной работе описываются результаты применения численных методов при построении приближенного решения задачи о нахождении выпуклого тела вращения максимальной площади поверхности с несколькими дополнительными ограничениями на ширину.

Ограниченная выпуклая пространственная фигура $F \in R^3$ описывается с помощью опорной функции

$$h(n) = \max_{y \in F}(n, y),$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный вектор направления. В сферической системе координат n имеет компоненты:

$$n_1 = \cos \theta \sin \varphi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \varphi,$$

$$n_3 = \cos \varphi, \quad \Omega = \{(\theta, \varphi) \mid \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}.$$

В случае регулярной фигуры $F \in R^3$ ее опорная функция

$$h(\theta, \varphi) = H(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

почти всюду в Ω удовлетворяет условиям [3]:

$$\rho(\theta, \varphi) \geq 0, \quad \rho(\theta, \varphi)T(\theta, \varphi) - \sigma^2(\theta, \varphi) \geq 0, \quad (\theta, \varphi) \in \Omega, \quad (1)$$

где

$$\rho(\theta, \varphi) = h_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) + h(\theta, \varphi), \quad \sigma(\theta, \varphi) = \frac{h_{\varphi\theta}(\theta, \varphi)}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} h_{\theta}(\theta, \varphi),$$

$$T(\theta, \varphi) = \frac{h_{\theta\theta}(\theta, \varphi)}{\sin^2 \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} h_{\varphi}(\theta, \varphi) + h(\theta, \varphi).$$

Площадь поверхности выпуклой фигуры $F \in R^3$ определяется равенством [4]:

$$S(F) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[h^2(\theta, \varphi) - \frac{h_{\varphi}^2(\theta, \varphi)}{2} - \frac{h_{\theta}^2(\theta, \varphi)}{2\sin^2 \varphi} \right] \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

1. Постановка задачи

Требуется найти пространственную фигуру, обладающую максимальной площадью поверхности и принадлежащую классу $F_3(\Delta, D)$, т.е. имеющую следующие ограничения на ширину

$$\Delta \leq h(\theta, \varphi) + h(\theta + \pi, \pi - \varphi) \leq D, \quad (\theta, \varphi) \in \Omega.$$

В заданных направлениях $(\nu_j, \tau_j), j = \overline{1, r}$, на ширину фигуры наложены дополнительные ограничения:

$$h(\nu_j, \tau_j) + h(\nu_j + \pi, \pi - \tau_j) \leq a_j, \quad (\nu_j, \tau_j) \in \Omega, \quad \Delta \leq a_j \leq D, \quad j = \overline{1, r}.$$

Выберем начало координат так, чтобы в направлении $\varphi = 0$ фигура имела минимальную ширину Δ , а начало сферической системы координат - так, чтобы опорная функция удовлетворяла следующим граничным условиям:

$$h(0, \varphi) = h(2\pi, \varphi), \quad h(\theta, 0) = h(\pi + \theta, \pi) = \frac{\Delta}{2}.$$

Рассмотрим центрально-симметричную фигуру вращения с опорной функцией $h = h(\varphi)$. Обозначим $t = \varphi$. Условия выпуклости (1) примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{h}(t) + h(t)\epsilon 0, & (2) \\ \frac{\cos t}{\sin t} \dot{h}(t) + h(t)\epsilon 0, & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad (3)$$

Требуется найти выпуклую фигуру вращения, имеющую максимальную площадь поверхности

$$S(F) = 2\pi \int_0^\pi [h^2(t) - \frac{1}{2} \dot{h}(t)^2] \sin(t) dt$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} h(0) = h(\pi) = \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta \leq h(t) + h(\pi - t) \leq D, \\ h(\tau_j) + h(\pi - \tau_j) \leq a_j, \quad j = \overline{1, r}, \\ \dot{h}(t) + h(t)\epsilon 0, \quad \frac{\cos t}{\sin t} \dot{h}(t) + h(t)\epsilon 0, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

В силу симметрии фигуры вращения, задача сводится к отысканию опорной функции симметричной фигуры в плоскости, то есть фигуры, для которой выполнено условие: $h(t) = h(\pi - t), t \in [0, \pi]$.

Введем функцию $G(t) = \frac{\cos t}{\sin t} \dot{h}(t) + h(t), t \in [0, \pi]$. Задача решается на расширенном множестве без учета условия (3), выполнение которого, эквивалентное неотрицательности функции $G(t)$, будет проверяться на оптимальном решении задачи.

Обозначим

$$x_1(t) = h(t) + h(\pi - t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad u(t) = x_1(t) + \dot{x}_1(t), \quad t \in [0, \pi].$$

Задача сводится к минимизации функционала

$$J(u) = -\frac{1}{2\pi} S(F) = -\int_0^\pi [x_1^2(t) - \frac{x_2^2(t)}{2}] \sin(t) dt$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad u(t)\epsilon 0, \quad (4)$$

$$\Delta \leq x_1(t) \leq D, \quad t \in [0, \pi], \quad x_1(\pi) = \Delta, \quad x_2(\pi) = -\sqrt{D^2 - \Delta^2}, \quad (5)$$

$$x_1(\tau_j) \leq a_j, \quad j = \overline{1, r}, \quad x_1(0) = \Delta, \quad x_2(0) = \sqrt{D^2 - \Delta^2}. \quad (6)$$

Задача относится к классу задач оптимального управления с фазовыми ограничениями.

2. Решение задачи методом штрафных функций

Применим для решения задачи метод внешних штрафных функций. При $r = 1$, $a_1 = D$, K -ая задача последовательности, к которой редуцируется исходная с применением внешних штрафных функций квадратичного типа, формулируется следующим образом: требуется минимизировать функционал

$$J(u) = - \int_0^{\pi} \left[x_1^2(t) - \frac{1}{2} x_2^2(t) - M_1^k (\Delta - x_1(t))_+^2 - M_2^k (x_1(t) - D)_+^2 \right] \sin(t) dt + \\ + M_3^k |x_1(\pi) - \Delta|^2 + M_4^k |x_2(\pi) + \sqrt{D^2 - \Delta^2}|^2 \quad (7)$$

при ограничениях (4),(6).

Здесь $M_1^k, M_2^k, M_3^k, M_4^k$ - элементы бесконечно возрастающих последовательностей, k - номер приближающей задачи. Начальным приближением для решения очередной задачи служит решение предыдущей. Каждая последующая задача решается с большей точностью.

Для построения численного метода решения задачи оптимального управления перейдем к ее дискретной аппроксимации. Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на q интервалов. Обозначая через σ величину i -го интервала, полагаем

$$t_0 = 0, \quad t_i = i\sigma, \quad x_1^i = x_1(t_i), \quad x_2^i = x_2(t_i), \quad u^i = u(t_i), \\ t_q = \pi, \quad i = 0, q.$$

Будем считать внутри каждого интервала управление постоянным. Дискретная аппроксимация сформулированной задачи основывается на схемах численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае применения схемы интегрирования Эйлера задача оптимального управления (7),(4),(6) редуцируется к задаче нелинейного программирования вида: минимизировать функцию

$$J(x, u) = \\ = - \sum_{i=0}^{q-1} \left[\left((x_1^i)^2 - \frac{1}{2} (x_2^i)^2 \right) \sin t^i - M_1^k (\Delta - x_1^i)_+^2 - M_2^k (x_1^i - D)_+^2 \right] \sigma + \\ + M_3^k |x_1^q - \Delta|^2 + M_4^k |x_2^q + \sqrt{D^2 - \Delta^2}|^2 \quad (8)$$

при ограничениях

$$x_1^{i+1} = x_1^i + x_2^i \sigma, \quad x_2^{i+1} = x_2^i + (-x_1^i + u^i) \sigma, \quad u^i \in 0, \quad i = \overline{0, q-1}, \\ x_1^0 = \Delta, \quad x_2^0 = \sqrt{D^2 - \Delta^2}. \quad (9)$$

Функция Лагранжа задачи (8)-(9) имеет вид:

$$\begin{aligned}
L(\lambda_0, x, u, p) = & \\
= \lambda_0 \left[- \sum_{i=0}^{q-1} \left(((x_1^i)^2 - \frac{1}{2}(x_2^i)^2) \sin t^i - M_1^k (\Delta - x_1^i)_+^2 - M_2^k (x_1^i - D)_+^2 \right) \sigma + \right. & \\
+ M_3 |x_1^q - \Delta|^2 + M_4 |x_2^q + \sqrt{D^2 - \Delta^2}|^2 & \left. \right] + \sum_{i=0}^{q-1} p_1^{i+1} (x_1^{i+1} - x_1^i - x_2^i \sigma) + & \\
+ \sum_{i=0}^{q-1} p_2^{i+1} (x_2^{i+1} - x_2^i + (x_1^i - u^i) \sigma). &
\end{aligned}$$

Из необходимых условий оптимальности для дискретных задач получаем рекуррентные соотношения для вычисления импульсов:

$$\begin{aligned}
p_1^q &= -2\lambda_0 M_3^k |x_1^q - \Delta|, \\
p_2^q &= -2\lambda_0 M_4^k |x_2^q + \sqrt{D^2 - \Delta^2}|, \\
p_1^{i+1} &= p_1^i + \lambda_0 \left(-2x_1^i \sin t^i - 2M_1^k (\Delta - x_1^i)_+ + 2M_2^k (x_1^i - D)_+ \right) \sigma + p_2^{i+1} \sigma, \\
p_2^{i+1} &= p_2^i + \lambda_0 x_2^i \sin t^i \sigma - p_1^{i+1} \sigma, \quad i = \overline{0, q-1}.
\end{aligned}$$

Нерегулярных решений нет, рассматриваем случай $\lambda_0 = 1$. Для численного решения дискретной задачи вычисляем производную функции Лагранжа по управлению

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = -p_2^{i+1} \sigma, \quad i = \overline{0, q-1},$$

которая совпадает с градиентом минимизируемой функции.

Рассмотрим применение в решении задачи схемы метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

На каждом i -ом интервале проинтегрируем дифференциальные связи (4) по схеме:

$$\begin{aligned}
x_1^{i+1} &= x_1^i + \sigma \left(\frac{1}{6} x_2^i + \frac{1}{3} x_2^{i,2} + \frac{1}{3} x_2^{i,3} + \frac{1}{6} x_2^{i,4} \right), \\
x_2^{i+1} &= x_2^i + \\
&+ \sigma \left(\frac{1}{6} (-x_1^i + u^i) + \frac{1}{3} (-x_1^{i,2} + u^{i,2}) + \frac{1}{3} (-x_1^{i,3} + u^{i,3}) x_2^{i,3} + \frac{1}{6} (-x_1^{i,4} + u^{i,4}) \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
x_1^{i,2} &= x_1^i + \frac{1}{2} \sigma x_2^i, & x_2^{i,2} &= x_2^i + \frac{1}{2} \sigma (-x_1^i + u^i), \\
x_1^{i,3} &= x_1^i \left(1 + \frac{1}{2} \sigma \right) + \frac{1}{4} \sigma^2 x_2^i, & x_2^{i,3} &= x_2^i \left(1 + \frac{1}{2} \sigma \right) + \frac{1}{4} \sigma^2 (-x_1^i + u^i), \\
x_1^{i,4} &= x_1^i \left(1 + \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \sigma \right) \right) + \frac{1}{4} \sigma^3 x_2^i, & x_2^{i,4} &= x_2^i \left(1 + \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \sigma \right) \right) + \frac{1}{4} \sigma^3 (-x_1^i + u^i).
\end{aligned}$$

Задача принимает вид: требуется минимизировать функцию

$$\begin{aligned}
J(x, u) = & -\frac{1}{24} \sum_{i=0}^{q-1} \left[2 \left((x_1^i)^2 \sin(t^i) + 4 \left(x_1^i + \frac{1}{2} \sigma x_2^i \right)^2 \sin(t^i + \frac{1}{2} \sigma) + \right. \right. \\
& + 4 \left(x_1^i (1 + \frac{1}{2} \sigma) + \frac{1}{4} \sigma^2 x_2^i \right)^2 \sin(t^i + \frac{1}{2} \sigma) + 3 \left(x_1^i (1 + \sigma(1 + \frac{1}{2} \sigma)) + \frac{1}{4} \sigma^3 x_2^i \right)^2 \sin(t^{i+1}) - \\
& - \left(2 (x_2^i)^2 \sin(t^i) + 4 \left(x_2^i + \frac{1}{2} \sigma (-x_1^i + u^i) \right)^2 \sin(t^i + \frac{1}{2} \sigma) + \right. \\
& + 4 \left(x_2^i (1 + \frac{1}{2} \sigma) + \frac{1}{4} \sigma^2 (-x_1^i + u^i) \right)^2 \sin(t^i + \frac{1}{2} \sigma) + \\
& \left. \left. + 3 \left(x_2^i (1 + \sigma(1 + \frac{1}{2} \sigma)) + \frac{1}{4} \sigma^3 (-x_1^i + u^i) \right)^2 \sin(t^{i+1}) - \right. \right. \\
& - 24 M_1^k \left((\Delta - x_1^i)_+^2 + (\Delta - x_1^i - \frac{1}{2} \sigma x_2^i)_+^2 + (\Delta - x_1^i (1 + \frac{1}{2} \sigma) - \frac{1}{4} \sigma^2 x_2^i)_+^2 + \right. \\
& \left. + (\Delta - x_1^i (1 + \sigma(1 + \frac{1}{2} \sigma)) - \frac{1}{4} \sigma^3 x_2^i)_+^2 \right) - \\
& - 24 M_2^k \left((x_1^i - D)_+^2 + (x_1^i + \frac{1}{2} \sigma x_2^i - D)_+^2 + (x_1^i (1 + \frac{1}{2} \sigma) + \frac{1}{4} \sigma^2 x_2^i - D)_+^2 + \right. \\
& \left. + (x_1^i (1 + \sigma(1 + \frac{1}{2} \sigma)) + \frac{1}{4} \sigma^3 x_2^i - D)_+^2 \right) \Big] \sigma + M_3^k |x_1^q - \Delta|^2 + M_4^k |x_2^q + \sqrt{D^2 - \Delta^2}|^2
\end{aligned}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
x_1^{i+1} &= x_1^i \left(1 + \frac{1}{6} \sigma (7 + 3\sigma + \sigma^2) \right) + \frac{1}{12} x_2^i (2 + \sigma + \sigma^2) \sigma^2, \\
x_2^{i+1} &= x_2^i \left(1 + \frac{1}{6} \sigma (7 + 3\sigma + \sigma^2) \right) + \frac{1}{12} (-x_1^i + u^i) (2 + \sigma + \sigma^2) \sigma^2, \\
u^i &\in \mathbb{0}, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad x_1^0 = \Delta, \quad x_2^0 = \sqrt{D^2 - \Delta^2}.
\end{aligned}$$

Введем обозначения: $\bar{u}_{an}, \bar{x}_{an}, J_{an}$, - оптимальное решение задачи, полученное аналитически, S_{an} - площадь поверхности фигуры, соответствующей аналитическому решению, $\bar{u}_{calc}, \bar{x}_{calc}, J_{calc}$ - оптимальное решение задачи, полученное методом штрафных функций, C_{it} - число итераций метода штрафных функций, $\delta_{an}^J = \frac{|J_{calc} - J_{an}|}{|J_{an}|} \cdot 100\%$, $\delta_{an}^x = \frac{\|\bar{x}_{calc} - \bar{x}_{an}\|}{\|\bar{x}_{an}\|} \cdot 100\%$, $\delta_{an}^u = \frac{\|\bar{u}_{calc} - \bar{u}_{an}\|}{\|\bar{u}_{an}\|} \cdot 100\%$, S_{calc} - площадь поверхности фигуры, соответствующей численному решению, ε_x - точность метода по траектории, ε_J - точность метода по целевой функции.

Вычисления произведены при следующих значениях параметров:

$$\Delta = 0, 8, \quad D = 1, \quad \sigma = 10^{-3}, \quad \varepsilon_x = 10^{-12}, \quad \varepsilon_J = 10^{-12}.$$

Значение функционала, соответствующее оптимальному аналитическому решению задачи, равно $J_{an} = -1, 96$, площадь оптимальной фигуры $S_{an} = 3, 07$. В таблице 1 приведены значения введенных выше величин для оптимального решения задачи, полученного с применением аппроксимационных схем метода Эйлера и метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

На рисунках 1-4 представлены графики функций $p_1(t), p_2(t), u(t), x_1(t), x_2(t)$, полученные в результате построения оптимального решения методом внешних штрафных функций в зависимости от величины штрафного коэффициента для случая применения схемы метода Рунге-Кутты 4-го порядка при различных значениях штрафного коэффициента M_2^k .

Сплошной черной линией обозначено аналитическое решение задачи, соответствующее выбранным значениям параметров. На рисунке 5 приведен график функции $G(t)$, соответствующей численному оптимальному решению задачи при $M_2^k = 160$. Вид экстремальной фигуры вращения, воссозданной по вычисленной опорной функции, представлен на рисунке 6. Таким образом, в случае решения

Таблица 1: Результаты решения задачи методом штрафных функций.

	Схема Эйлера	Схема метода Рунге-Кутты 4-го порядка
C_{it}	380276	251321
J_{calc}	-1,971	-1,968
$\delta_{an}^x, \%$	0,7	0,7
$\delta_{an}^u, \%$	24	21
$\delta_{an}^J, \%$	0,5	0,4
S_{calc}	3,094	3,089

задачи методом штрафных функций с применением аппроксимационных схем 1-го и 4-го порядков оптимальное управление имеет значительные отклонения от оптимального управления, полученного аналитически.

3. Решение задачи методом проекции градиента

Рассмотрим условие выпуклости фигуры $\ddot{x}_1(t) + x_1(t) = u(t)\epsilon 0$, $t \in [0, \pi]$. Используя формулу Эйлера аппроксимации второй производной

$$\ddot{x}_1(t_i) \approx \frac{x_1^{i+2} - 2x_1^{i+1} + x_1^i}{\sigma^2},$$

получаем рекуррентное соотношение для фазовой переменной:

$$\frac{x_1^{i+2} - 2x_1^{i+1} + x_1^i}{\sigma^2} + x_1^i = u^{i+1}, \quad i = \overline{0, q-2}.$$

Используем его для получения ограничений на x_1^i . Ограничения на управление имеют вид: $u^i \epsilon 0$, $i = \overline{0, q-1}$. Из ограничения на функцию управления и дифференциальных связей получаем новые ограничения:

$$\frac{x_1^{i+2} - 2x_1^{i+1} + x_1^i}{\sigma^2} + x_1^i \epsilon 0, \quad i = \overline{0, q-2}.$$

Для вычисления интеграла в целевом функционале используем формулу левых прямоугольников. Производную фазовой траектории $x_2(t)$ также аппроксимируем по формуле Эйлера.

Требуется минимизировать функцию

$$J(x) = - \sum_{i=0}^{q-1} \left((x_1^i)^2 - \frac{1}{2} \frac{(x_1^{i+1} - x_1^i)^2}{\sigma^2} \right) \sigma \sin(t^i)$$

при ограничениях

$$\Delta \leq x_1^i \leq D, \quad i = \overline{0, q-2}, \quad x_1(\tau_j) \leq a_j, \quad j = \overline{1, r}, \quad (10)$$

$$\frac{x_1^{i+2} - 2x_1^{i+1} + x_1^i}{\sigma^2} + x_1^i \epsilon 0, \quad i = \overline{0, q-2}, \quad (11)$$

$$x_1^0 = x_1^q = \Delta, \quad x_2^0 = \sqrt{D^2 - \Delta^2}, \quad x_2^q = -\sqrt{D^2 - \Delta^2}. \quad (12)$$

Рассматриваемая задача относится к классу задач нелинейного программирования с ограничениями. Для определения направления приближения к экстремуму применяется метод проекции градиента. Условия:

$$\frac{x_1^{i+2} - 2x_1^{i+1} + x_1^i}{\sigma^2} + x_1^i \epsilon 0, \quad \frac{x_1^{i+1} - 2x_1^i + x_1^{i-1}}{\sigma^2} + x_1^{i-1} \epsilon 0, \\ \frac{x_1^i - 2x_1^{i-1} + x_1^{i-2}}{\sigma^2} + x_1^{i-2} \epsilon 0, \quad i = \overline{2, q-2},$$

эквивалентные системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1^i \epsilon \frac{2x_1^{i+1} - x_1^{i+2}}{1 + \sigma^2}, \\ x_1^i \leq \frac{x_1^{i+1} + (1 + \sigma^2)x_1^{i-1}}{2}, \\ x_1^i \epsilon 2x_1^{i-1} - (1 + \sigma^2)x_1^{i-2}, \end{cases} \quad i = \overline{2, q-2},$$

учитываются в методе с помощью проекции.

Градиент минимизируемой функции

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^i} = -2x_1^i \sin(t^i) \sigma - \frac{x_1^{i+1} - x_1^i}{\sigma} \sin(t^i) + \frac{x_1^i - x_1^{i-1}}{\sigma} \sin(t^{i-1}), \quad i = \overline{1, q-1}.$$

Вычисления произведены при следующих значениях параметров:
 $\Delta = 0, 8, \quad D = 1, \quad \sigma = 10^{-3}, \quad \varepsilon_x = 10^{-12}, \quad \varepsilon_J = 10^{-12}.$

Значения введенных выше величин, полученные в результате решения задачи методом проекции градиента, представлены в таблице 2.

На рисунках 7,8 представлены графики функций, полученных в ходе работы метода проекции градиента.

График вычисленной функции $G(t)$ имеет вид, представленный на рисунке 5.

Симметричная фигура вращения, восстановленная по полученной функции ширины, имеет вид, представленный на рисунке 6.

Результаты решения задачи методом проекции градиента при одном и пяти дополнительных ограничениях на ширину приведены в таблице 3. Графики функций x_1, x_2, u , соответствующих численным оптимальным решениям, представлены на рисунках 9-12. Экстремальные фигуры вращения при одном и пяти дополнительных ограничениях, восстановленные по вычисленным функциям ширины, имеют виды, представленные на рисунке 13.

4. Сравнительный анализ решения задачи методом штрафных функций и методом проекции градиента

Сравнение эффективности метода штрафных функций и метода проекции градиента при решении рассматриваемой задачи проведем по следующим критериям: скорость сходимости и точность сходимости. Построим график зависимости количества итераций методов до достижения оптимума от количества q точек разбиения интервала (рис. 14), а также график зависимости значений оптимума, полученных в результате работы этих методов, от q (рис. 15) Вычисления произведены

при следующих значениях параметров:

$$\Delta = 0,8, \quad D = 1, \quad \varepsilon_x = 10^{-12}, \quad \varepsilon_J = 10^{-12}.$$

Оптимальное значение функционала, полученное аналитически, равно $J_{an} = -1,96$, величина площади поверхности $S_{an} = 3,07$. Таким образом, метод проекции градиента в решении рассматриваемой задачи значительно точнее определяет фазовую траекторию по сравнению с методом внешних штрафных функций, получает оптимальное решение за меньшее число итераций, а также позволяет с большей точностью решать экстремальные геометрические задачи с заданным количеством дополнительными ограничениями.

Список литературы

- [1] Андреева Е.А. Применение двойственного метода для решения одной экстремальной задачи геометрии // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1985. С.28-34.
- [2] Андреева Е.А., Цветкова Е.Г., Савичева Ю.А. Решение экстремальных задач геометрии двойственным методом. Тверь, 2007.
- [3] Болтянский В.Г., Яглом И.М. Выпуклые фигуры. М., 1951.
- [4] Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. Берлин, 1934.
- [5] Цветкова Е.Г. Задача о построении поверхности вращения, обладающей максимальной площадью поверхности, с заданными ограничениями на ширину // Многоуровневая система подготовки специалистов на основе информационных и коммуникационных технологий образования. Тверь, 2006. С.176-187.

Приложение

Таблица 2. Результаты решения задачи методом проекции градиента.

Метод проекции градиента	
C_{it}	27347
J_{calc}	-1,959
δ_{an}^x	0,007
δ_{an}^u	0,006
δ_{an}^J	0,05
S_{calc}	3,07

Таблица 3. Результаты решения задачи методом проекции градиента с дополнительными ограничениями на ширину.

r	τ_j	a_j	J_{calc}	C_{it}	S_{calc}
1	$\pi/2$	$0,95D$	-1,928	31241	3,029
5	$\pi/8$	$0,9D$	-1,874	21748	2,945
	$\pi/4$	$0,95D$			
	$\pi/2$	$0,98$			
	$3\pi/4$	$0,95D$			
	$7\pi/8$	$0,9D$			

Таблица 4. Сравнительный анализ методов.

		Метод штрафных функций с применением схемы Эйлера	Метод штрафных функций с применением схемы Рунге-Кутты	Метод проекции градиента
q=500	C_{it}	172853	152852	27347
	J_{calc}	-1,981	-1,971	-1,959
	δ_u^{an}	30	23	0,008
	δ_x^{an}	0,8	0,8	0,008
	δ_J^{an}	1,07	0,56	0,05
	S_{calc}	3,096	3,091	3,07
q=1000	C_{it}	380276	336274	70574
	J_{calc}	-1,971	-1,968	-1,959
	δ_u^{an}	30	23	0,006
	δ_x^{an}	0,8	0,8	0,007
	δ_J^{an}	0,5	0,4	0,05
	S_{calc}	3,094	3,089	3,07
q=2000	C_{it}	876636	773431	140252
	J_{calc}	-1,969	-1,967	-1,959
	δ_u^{an}	30	23	0,006
	δ_x^{an}	0,8	0,8	0,006
	δ_J^{an}	0,5	0,3	0,05
	S_{calc}	3,094	3,088	3,07

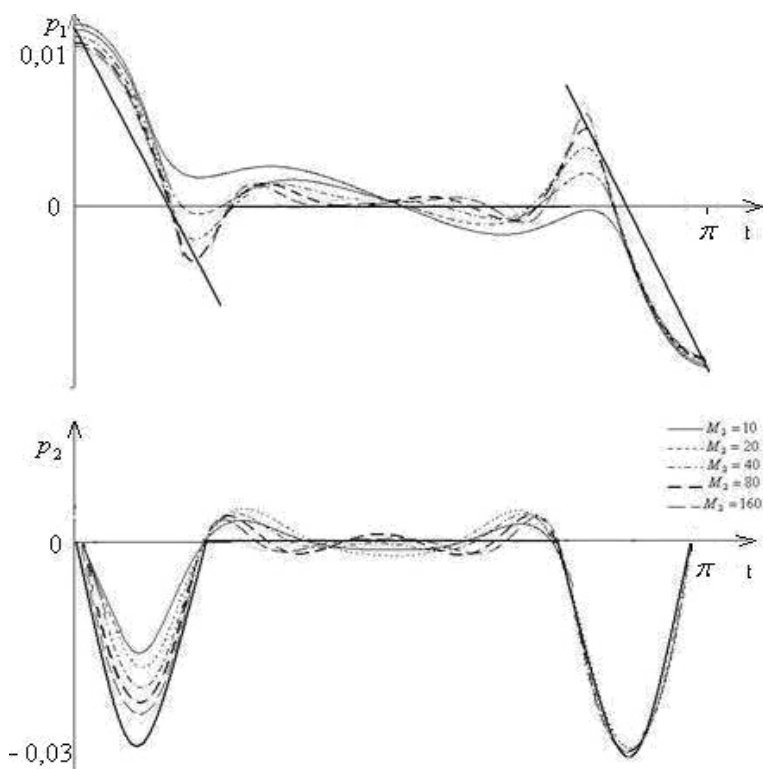


Рис. 1: Графики сопряженных функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$.

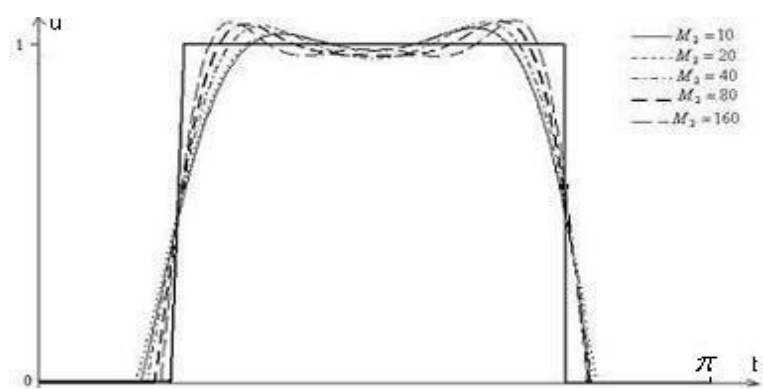


Рис. 2: Графики управления $u(t)$.

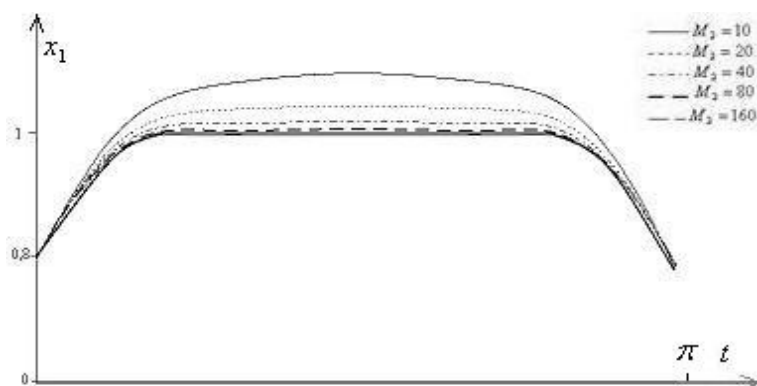


Рис. 3: Графики траектории $x_1(t)$.

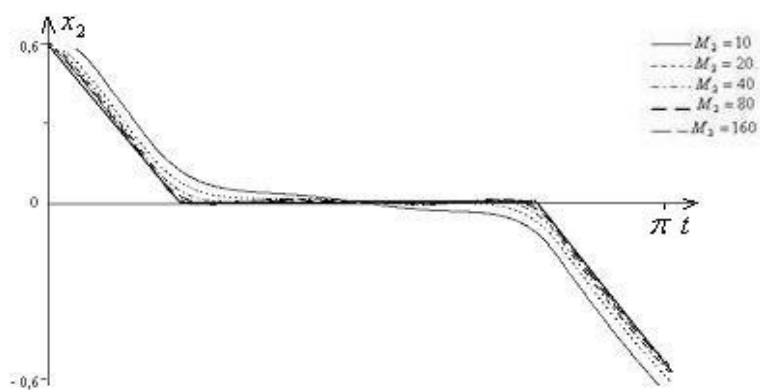


Рис. 4: Графики траектории $x_2(t)$.

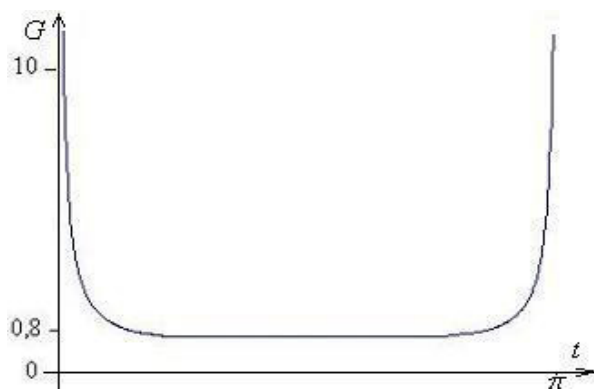


Рис. 5: График функции $G(t)$.

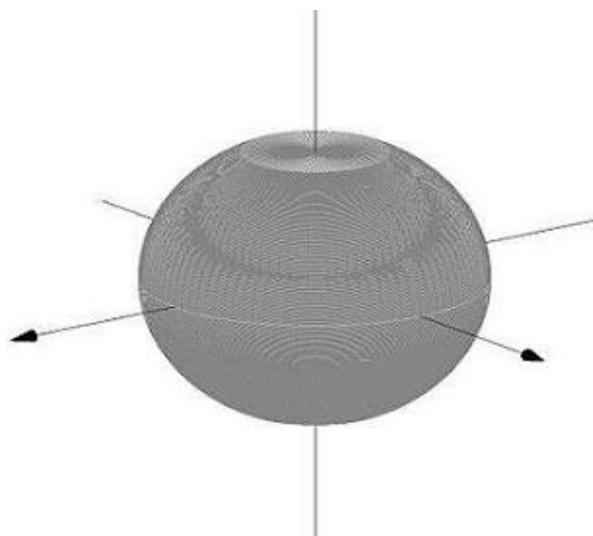


Рис. 6: Вид экстремальной фигуры вращения без дополнительных ограничений на ширину.

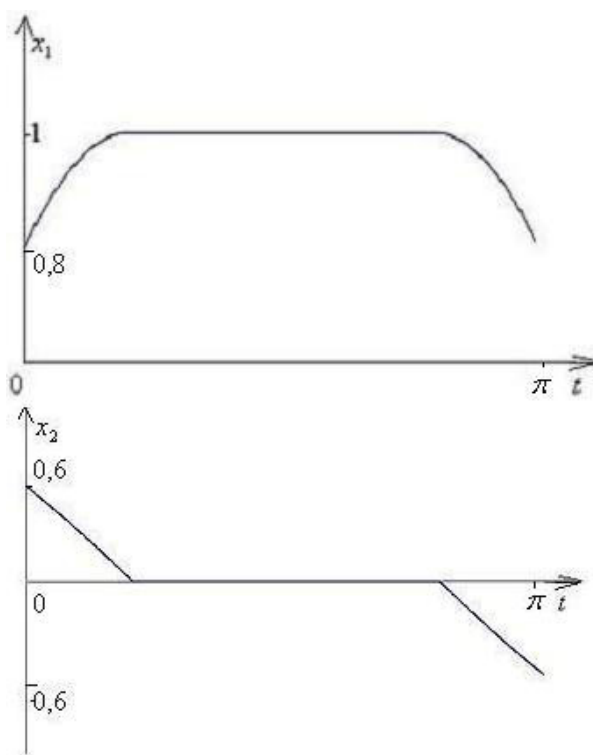


Рис. 7: Графики x_1 x_2 .

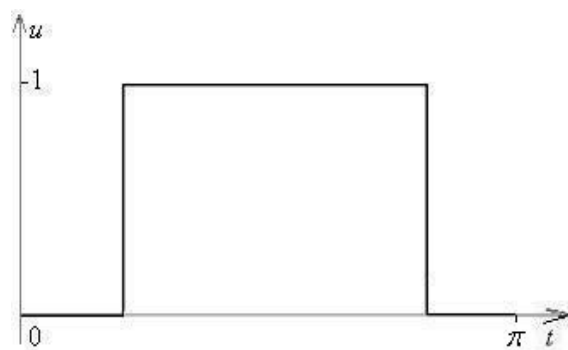


Рис. 8: График u .

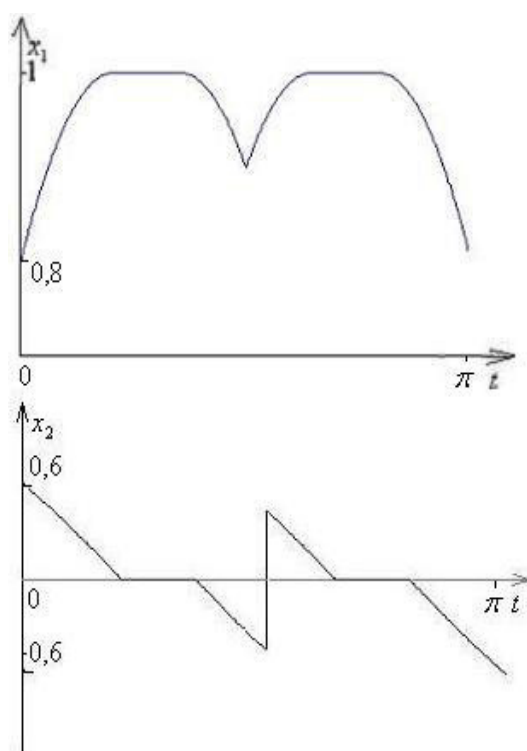


Рис. 9: Графики x_1 x_2 при одном дополнительном ограничении.

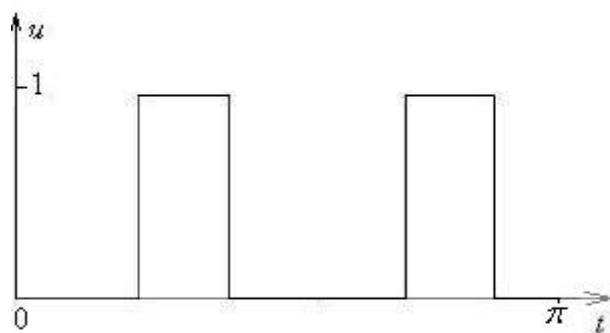


Рис. 10: График u при одном дополнительном ограничении.

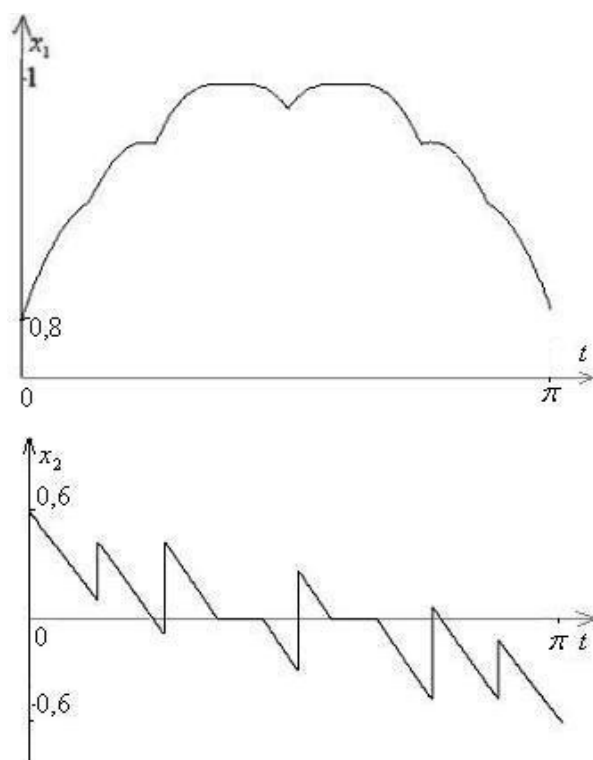


Рис. 11: Графики x_1 и x_2 при пяти дополнительных ограничениях.

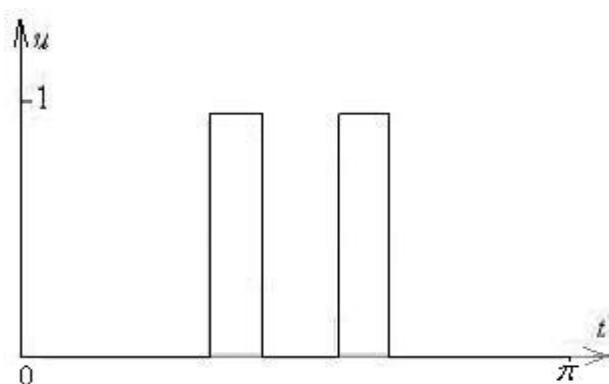


Рис. 12: График u при пяти дополнительных ограничениях.

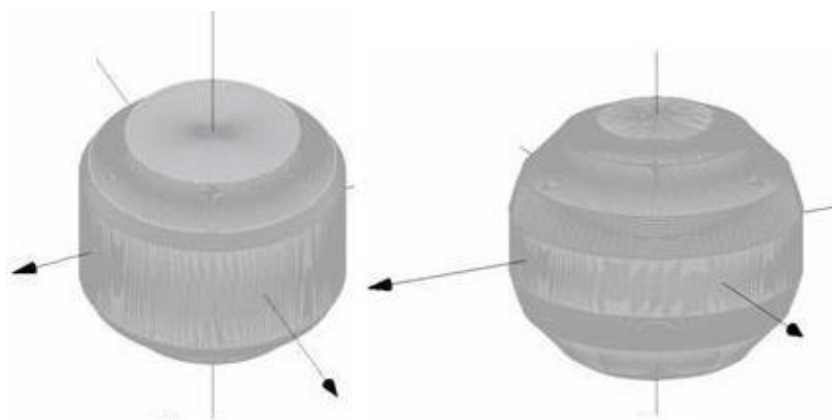


Рис. 13: Виды экстремальных фигур вращения при одном и пяти дополнительных ограничениях на ширину.

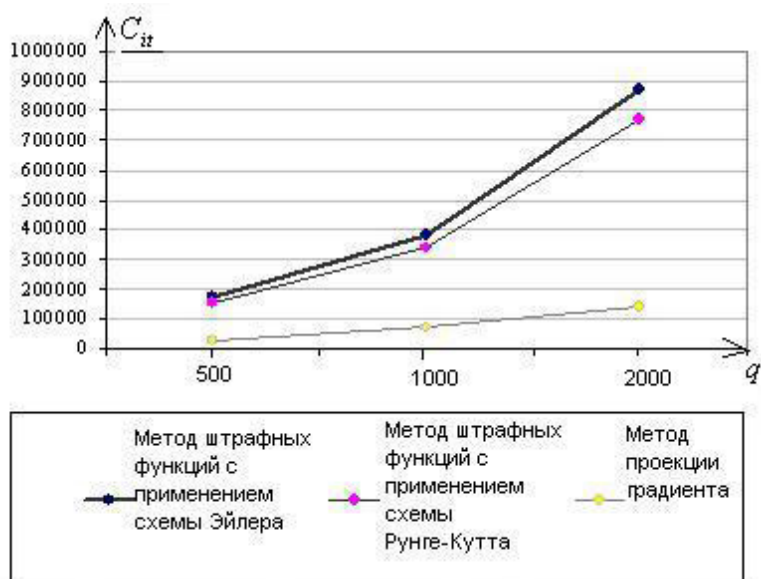


Рис. 14: График зависимости количества итераций методов от величины q .

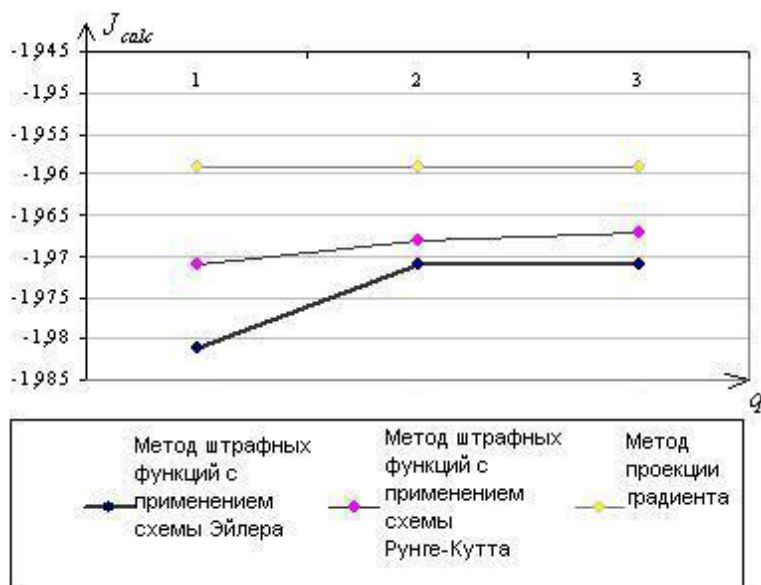


Рис. 15: График зависимости значений оптимума от величины q .