УДК 519.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МОЩНОСТЕЙ КРИТЕРИЕВ В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

Королев Р.А., Бенинг В.Е.
Кафедра математической статистики,
факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Москва

Поступила в редакцию 03.09.2008, после переработки 15.09.2008.

В работе развивается подход, предложенный в [1]. Прямыми методами, то есть с помощью асимптотических разложений, доказана формула (см. (1.4)) для предела отклонения мощности асимптотически оптимального критерия от мощности наилучшего критерия в случае распределения Лапласа.

The paper deals with the approach proposed in [1]. Using asymptotic expansions we obtain a formula (see (1.4)) for the limit of the difference between the power of the asymptotically optimal test and the power of the asymptotically most powerful test for the case of Laplace distribution.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, функция мощности, распределение Лапласа.
Keywords: asymptotic expansion, power function, Laplace or double exponential distribution.

1. Введение

Следуя работе [1], рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$\mathsf{H}_0 : \theta \,=\, 0 \tag{1.1}$$

против последовательности близких альтернатив вида

$$\mathsf{H}_{n,1} : \theta \,=\, \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad 0 \,<\, t \,\leq\, C, \quad C \,>\, 0, \tag{1.2}$$

на основе выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ — независимых одинаково распределенных наблюдений, имеющих распределение Лапласа с плотностью вида

$$p(x,\theta) \,=\, \frac{1}{2}e^{-|x\,-\,\theta|}, \quad x,\, \theta \,\in \mathsf{R}^1. \tag{1.3}$$

Естественность возникновения распределения Лапласа в задачах математической статистики обоснована в работе [7].

Для каждого фиксированного $t \in (0, C]$ обозначим через $\beta_n^*(t)$ мощность наилучшего критерия размера $\alpha \in (0,1)$. Такой критерий всегда существует согласно фундаментальной лемме Неймана-Пирсона (см., например, [4], стр. 94) и основан на логарифме отношения правдоподобия $\Lambda_n(t)$ (см. формулу (1.5) ниже).

В работе [1] эвристически была получена формула (см. [1], формула (3.10))

$$r(t) \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\beta_n^*(t) - \beta_n(t)) = \frac{t^2}{3}\varphi(u_\alpha - t), \tag{1.4}$$

где $\beta_n^*(t)$ и $\beta_n(t)$ — соответственно, мощности наилучшего и асимптотически эффективного критериев уровней $\alpha \in (0,1)$, основанных, соответственно, на статистиках

$$\Lambda_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (|X_i| - |X_i - tn^{-1/2}|), \tag{1.5}$$

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} sign(X_i), \tag{1.6}$$

$\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $\varphi(x)$ — его плотность, $\Phi(u_\alpha) = 1-\alpha,\ \alpha \in (0,1)$.

В этой работе прямыми методами получены асимптотические разложения для мощностей $\beta_n(t)$ и $\beta_n^*(t)$, то есть доказаны представления (см. Теорема 2.1 и Теорема 3.3)

$$\beta_n(t) = \Phi(t-u_\alpha) - \frac{t^2}{2\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha) + o(n^{-1/2}), \tag{1.7}$$

$$\beta_n^*(t) = \Phi(t-u_\alpha) - \frac{t^2}{6\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha) + o(n^{-1/2}), \tag{1.8}$$

из которых непосредственно следует формула (1.4).

2. Асимптотическое разложение для мощности критерия знаков

В этом разделе будет построено асимптотическое разложение для мощности $\beta_n(t)$ критерия, основанного на статистике T_n (см. (1.6)). В силу решетчатости распределения статистики T_n это асимптотическое разложение содержит разрывные члены. Основой для получения этого асимптотического разложения служит работа [6]. Из результатов работы [2] непосредственно следует теорема.

Теорема 2.1. *Для мощности $\beta_n(t)$ равномерно по $t \in [0, C]$, $C\mathfrak{e}0$, справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\beta_n(t) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t^2}{2\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha) +$$

$$+ \frac{t}{2n}\varphi(t - u_\alpha)\Bigg(\frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4}(t - u_\alpha) -$$

$$- \frac{1}{6}(u_\alpha^2 + u_\alpha t - 3t^2 + 24\delta_n(1 - \delta_n) - 3)\Bigg) + \mathcal{O}(n^{-3/2}),$$

где

$$\delta_n = \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n}u_\alpha}{2} - \left[\frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n}u_\alpha}{2}\right] + \mathcal{O}(n^{-1/2}),$$

здесь $[y]$ — *целая часть числа* $y \in \mathsf{R}^1$.

Доказательство. Применяя Лемму 3.5.1 из работы [2] (стр. 56), имеем асимптотическое разложение вида

$$\beta_n(t) = \Phi(\gamma_n - u_\alpha) - \frac{\gamma_n\varphi(\gamma_n - u_\alpha)}{12n}(u_\alpha^2 + u_\alpha\gamma_n -$$

$$- 3\gamma_n^2 + 24\delta_n(1 - \delta_n) - 3) + \mathcal{O}(n^{-3/2}),$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{n}\Big(2F(tn^{-1/2}) - 1\Big),$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x \mathfrak{e} 0.$$

По формуле Тейлора имеем

$$F(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta - \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta^3}{12} + \mathcal{O}(\theta^4), \quad \theta > 0,$$

поэтому

$$\gamma_n = \sqrt{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-2})\right) =$$

$$= t - \frac{t^2}{2\sqrt{n}} + \frac{t^3}{6n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}).$$

Теперь снова по формуле Тейлора получим

$$\beta_n(t) = \Phi(\gamma_n - u_\alpha) - \frac{t\varphi(t - u_\alpha)}{12n}(u_\alpha^2 + tu_\alpha -$$

$$- 3t^2 + 24\delta_n(1 - \delta_n) - 3) + \mathcal{O}(n^{-3/2}) =$$

$$= \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t^2}{2\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha) + \frac{1}{2n}\varphi(t - u_\alpha)\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}(t - u_\alpha) -\right.$$

$$\left. - \frac{t}{6}(u_\alpha^2 + tu_\alpha - 3t^2 + 24\delta_n(1 - \delta_n) - 3)\right) + \mathcal{O}(n^{-3/2}).$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.1.

1. В работе [2] рассматривается статистика вида

$$\overline{T}_n \;=\; \sum_{j:\, X_j \,>\, 0} 1\,,$$

в силу вида которой критерий получил название критерия знаков. Эта статистика связана с рассматриваемой статистикой T_n (см. (1.6)) линейным преобразованием типа

$$T_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} sign(X_i) \;=\; \frac{2}{\sqrt{n}}\overline{T}_n \;-\; \sqrt{n}\,,\ \text{п.в.},$$

которое не влияет на мощности соответствующих критериев.

2. Для получения формулы (1.7) в Теореме 2. 1 достаточно первых двух членов асимптотического разложения для мощности $\beta_n(t)$. Однако, мы приводим более сильный результат, который может быть полезен при численной аппроксимации мощности $\beta_n(t)$.

3. Асимптотическое разложение для мощности критерия, основанного на логарифме отношения правдоподобия

В этом разделе будут получены асимптотические разложения типа Эджворта для функции распределения логарифма отношения правдоподобия $\Lambda_n(t)$ (см. (1.5)) как при гипотезе H_0, так и при альтернативе $\mathsf{H}_{n,1}$ (см. (1.1), (1.2)). Из этих асимптотических разложений будет получено асимптотическое разложение для мощности $\beta_n^*(t)$ (см. (1.8)). Основой здесь служат результаты работы [5].

Для $\theta > 0$ определим функцию

$$h_\theta(x) \;=\; \frac{1}{\theta}(|x| \;-\; |x \;-\; \theta|) \;=$$
$$= \begin{cases} -1, & x \;\le\; 0, \\ 2x/\theta \;-\; 1, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x\mathfrak{e}\theta, \end{cases} \tag{3.1}$$

тогда логарифм отношения правдоподобия $\Lambda_n(t)$ можно записать в виде

$$\Lambda_n(t) \;=\; tn^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} h_{tn^{-1/2}}(X_i). \tag{3.2}$$

Поведение моментов случайной величины $h_\theta(X_1)$ как при гипотезе, так и при альтернативе описывается следующей леммой.

Лемма 3.1. *При $\theta \downarrow 0$ справедливы следующие равенства:*

$$\mathsf{E}_0 h_\theta(X_1) \;=\; -\mathsf{E}_\theta h_\theta(X_1) \;=\; -\frac{\theta}{2} \;+\; \frac{\theta^2}{6} \;-\; \frac{\theta^3}{24} \;+\; \mathcal{O}(\theta^4),$$

$$\mathsf{E}_0 h_\theta^2(X_1) \;=\; \mathsf{E}_\theta h_\theta^2(X_1) \;=\; 1 \,-\, \frac{\theta}{3} \,+\, \frac{\theta^2}{6} \,+\, \mathcal{O}(\theta^3),$$

$$\mathsf{E}_0 h_\theta^3(X_1) \;=\; -\mathsf{E}_\theta h_\theta^3(X_1) \;=\; -\frac{\theta}{2} \,+\, \mathcal{O}(\theta^2),$$

$$\mathsf{E}_0 h_\theta^4(X_1) \;=\; \mathsf{E}_\theta h_\theta^4(X_1) \;=\; 1 \,-\, \frac{2}{5}\theta \,+\, \mathcal{O}(\theta^2),$$

а также

$$\mathfrak{D}_0 h_\theta(X_1) \;=\; \mathfrak{D}_\theta h_\theta(X_1) \;=\; 1 \,-\, \frac{\theta}{3} \,-\, \frac{\theta^2}{12} \,+\, \mathcal{O}(\theta^3),$$

$$\mathsf{E}_0\big(h_\theta(X_1) \,-\, \mathsf{E}_0 h_\theta(X_1)\big)^3 = -\mathsf{E}_\theta\big(h_\theta(X_1) \,-\, \mathsf{E}_\theta h_\theta(X_1)\big)^3 = \theta \,+\, \mathcal{O}(\theta^2),$$

$$\mathsf{E}_0\big(h_\theta(X_1) \,-\, \mathsf{E}_0 h_\theta(X_1)\big)^4 = \mathsf{E}_\theta\big(h_\theta(X_1) \,-\, \mathsf{E}_\theta h_\theta(X_1)\big)^4 = 1 \,-\, \frac{2}{5}\theta \,+\, \mathcal{O}(\theta^2).$$

Доказательство. Найдем как при гипотезе, так и при альтернативе характеристические функции случайной величины $h_\theta(X_1)$. Используя формулы (2.4), (2.5) из работы [1], получим

$$f_0(s) \;\equiv\; \mathsf{E}_0\, e^{ish_\theta(X_1)} \;=\; \frac{is(e^{is-\theta} \,+\, e^{-is}) \,-\, \theta e^{-is}}{2is-\theta}, \tag{3.3}$$

$$f_\theta(s) \;\equiv\; \mathsf{E}_\theta\, e^{ish_\theta(X_1)} \;=\; \frac{is(e^{-is-\theta} \,+\, e^{is}) \,+\, \theta e^{is}}{2is+\theta}. \tag{3.4}$$

Разлагая теперь экспоненты по формулам

$$e^\theta \;=\; 1 \,+\, \theta \,+\, \frac{\theta^2}{2} \,+\, \frac{\theta^3}{6} \,+\, \cdots\,,$$

$$e^{is} \;=\; 1 \,+\, is \,-\, \frac{s^2}{2} \,-\, \frac{is^3}{6} \,+\, \cdots\,,$$

получим разложения для характеристических функций (3.3) и (3.4), из которых следуют утверждения леммы. □

Лемма 3.2. *Справедливы следующие асимптотические разложения:*

1. *Для любых* $0 \,<\, t_1 \,<\, t_2$ *выполнено равенство*

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]}\sup_{x\in\mathsf{R}^1}\bigg|\mathsf{P}_{n,0}\big(\Lambda_n(t) \,<\, x\big) \,-\, \Phi\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big) \,-\, \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big) \,-$$
$$-\,\frac{1}{6n}\varphi\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big)\bigg(\frac{t^2}{2}\Big(\frac{x}{t}+\frac{2t}{3}\Big) \,-\, \frac{t^2}{12}\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big)^2\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big) \,-$$
$$-\,t\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big)^2 \,+\, t \,+\, \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big)^3 \,-\, \frac{3}{2}\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big)\bigg)\bigg| \;=\; o(n^{-1}).$$

2. Для любых $0 < t_1 < t_2$, $x_0 \in \mathsf{R}^1$, *справедливо равенство*

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]}\sup_{x\le x_0}\Bigg|\mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}\big(\Lambda_n(t) < x\big) - \Phi\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big) - \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big) -$$
$$-\frac{1}{6n}\varphi\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big)\Bigg(\frac{t^2}{2}\Big(\frac{x}{t}-\frac{2t}{3}\Big) - \frac{t^2}{12}\Big(\frac{x}{t}+\frac{t}{2}\Big)^2\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big) +$$
$$+t\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big)^2 - t + \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big)^3 - \frac{3}{2}\Big(\frac{x}{t}-\frac{t}{2}\Big)\Bigg)\Bigg| = o(n^{-1}).$$

Доказательство.

1. Для доказательства первого утверждения применим Предложение 1.1 из работы [5] для $r = 4$. Равномерная интегрируемость $h_\theta^4(X_1)$ следует из ограниченности функции $h_\theta(x)$

$$\big|h_\theta(x)\big| \le 1,\ \theta > 0,\ x \in \mathsf{R}^1.$$

Условие (II) Предложения 1.1 следует из Условия АС и примера 1.3 работы [5]. Итак, согласно Предложению 1.1 из [5] справедливо равенство

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]}\sup_{x\in\mathsf{R}^1}\Bigg|\mathsf{P}_{n,0}\Big(\frac{\Lambda_n(t) - t\sqrt{n}\mu_t(0)}{t\sigma_t(0)} < x\Big) - \Phi(x) +$$
$$+\frac{1}{6\sqrt{n}}\frac{\mu_{3t}(0)}{\sigma_t^3(0)}\varphi(x)(x^2-1) + \frac{1}{24n}\Big(\frac{\mu_{4t}(0)}{\sigma_t^4(0)} - 3\Big)\varphi(x)(x^3-3x) +$$
$$+\frac{1}{72n}\Big(\frac{\mu_{3t}(0)}{\sigma_t^3(0)}\Big)^2\varphi(x)(x^5-10x^3+15x)\Bigg| = o(n^{-1}), \tag{3.5}$$

где

$$\mu_t(0) = \mathsf{E}_0 h_{tn^{-1/2}}(X_1),$$
$$\sigma_t^2(0) = \mathfrak{D}_0 h_{tn^{-1/2}}(X_1),$$
$$\mu_{3t}(0) = \mathsf{E}_0\big(h_{tn^{-1/2}}(X_1) - \mathsf{E}_0 h_{tn^{-1/2}}(X_1)\big)^3,$$
$$\mu_{4t}(0) = \mathsf{E}_0\big(h_{tn^{-1/2}}(X_1) - \mathsf{E}_0 h_{tn^{-1/2}}(X_1)\big)^4.$$

Теперь применим Лемму 3.1, имеем

$$\mu_t(0) = -\frac{t}{2\sqrt{n}} + \frac{t^2}{6n} - \frac{t^3}{24n\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-2}), \tag{3.6}$$

$$\sigma_t^2(0) = 1 - \frac{t}{3\sqrt{n}} - \frac{t^2}{12n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}),$$

$$\mu_{3t}(0) = \frac{t}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

$$\mu_{4t}(0) = 1 - \frac{2t}{5\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

из этих соотношений и (3.5) получаем, что равномерно по $x \in \mathsf{R}^1$, $t \in [t_1, t_2]$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}_{n,0}\Big(\Lambda_n(t) < x\Big) = \mathsf{P}_{n,0}\left(\frac{\Lambda_n(t) - t\sqrt{n}\mu_t(0)}{t\sigma_t(0)} < \frac{x - t\sqrt{n}\mu_t(0)}{t\sigma_t(0)}\right) =$$

$$= \Phi(\overline{x}) - \frac{t}{6n}\varphi(\overline{x})(\overline{x}^2 - 1) + \frac{1}{12n}\varphi(\overline{x})(\overline{x}^3 - 3\overline{x}) + o(n^{-1}),$$

где

$$\overline{x} \equiv \frac{x - t\sqrt{n}\mu_t(0)}{t\sigma_t(0)} = \frac{x}{t} + \frac{t}{2} + \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big) + \frac{t^2}{12n}\Big(\frac{x}{t} + \frac{2t}{3}\Big) + \mathcal{O}(n^{-3/2}).$$

После подстановки получим

$$\mathsf{P}_{n,0}\big(\Lambda_n(t) < x\big) = \Phi\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big) + \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{6n}\varphi\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big)\Bigg(\frac{t^2}{2}\Big(\frac{x}{t} + \frac{2t}{3}\Big) - \frac{t^2}{12}\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big)^2\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big) -$$

$$- t\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big)^2 + t + \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big)^3 - \frac{3}{2}\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big)\Bigg) + o(n^{-1}). \qquad (3.7)$$

Отсюда следует первое утверждение.

2. Для доказательства второго утверждения применим Предложение 2.1 из работы [5]. Поскольку его условия также выполнены, то равномерно по $x \le x_0$ и $t \in [t_1, t_2]$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}\left(\frac{\Lambda_n(t) - t\sqrt{n}\mu_t(tn^{-1/2})}{t\sigma_t(tn^{-1/2})} < x\right) = \Phi(x) - \frac{1}{6\sqrt{n}}\frac{\mu_{3t}(tn^{-1/2})}{\sigma_t^3(tn^{-1/2})}\varphi(x)(x^2-1) -$$

$$- \frac{1}{24n}\Big(\frac{\mu_{4t}(tn^{-1/2})}{\sigma_t^4(tn^{-1/2})} - 3\Big)\varphi(x)(x^3 - 3x) -$$

$$- \frac{1}{72n}\Big(\frac{\mu_{3t}(tn^{-1/2})}{\sigma_t^3(tn^{-1/2})}\Big)^2\varphi(x)(x^5 - 10x^3 + 15x) + o(n^{-1}),$$

где опять применяя Лемму 3.1, получим

$$\mu_t(tn^{-1/2}) \equiv \mathsf{E}_{tn^{-1/2}} h_{tn^{-1/2}}(X_1) = \frac{t}{2\sqrt{n}} - \frac{t^2}{6n} + \frac{t^3}{24n\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

$$\sigma_t^2(tn^{-1/2}) \equiv \mathfrak{D}_{tn^{-1/2}} h_{tn^{-1/2}}(X_1) = 1 - \frac{t}{3\sqrt{n}} - \frac{t^2}{12n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}),$$

$$\mu_{3t}(tn^{-1/2}) \equiv \mathsf{E}_{tn^{-1/2}}\big(h_{tn^{-1/2}}(X_1) - \mathsf{E}_{tn^{-1/2}} h_{tn^{-1/2}}(X_1)\big)^3 = -\frac{t}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

$$\mu_{4t}(tn^{-1/2}) \equiv \mathsf{E}_{tn^{-1/2}}\big(h_{tn^{-1/2}}(X_1) - \mathsf{E}_{tn^{-1/2}} h_{tn^{-1/2}}(X_1)\big)^4 = 1 - \frac{2t}{5\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Аналогично формуле (3.7) имеем

$$\mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}\big(\Lambda_n(t) < x\big) = \Phi\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big) + \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{6n}\varphi\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big)\bigg(\frac{t^2}{2}\Big(\frac{x}{t} - \frac{2t}{3}\Big) - \frac{t^2}{12}\Big(\frac{x}{t} + \frac{t}{2}\Big)^2\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big) +$$

$$+ t\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big)^2 - t + \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big)^3 - \frac{3}{2}\Big(\frac{x}{t} - \frac{t}{2}\Big)\bigg) + o(n^{-1}). \qquad (3.8)$$

Лемма доказана.

□

Замечание 3.1. Заметим, что из Леммы 3.2 следует, что входящие в мощность $\beta_n^*(t)$ выражения типа

$$\gamma_n \mathsf{P}_{n,0}\Big(\Lambda_n(t) = c_n\Big), \quad \gamma_n \mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}\Big(\Lambda_n(t) = c_n\Big), \quad 0 \le \gamma_n \le 1, \quad c_n \in \mathsf{R}^1,$$

являются величинами вида $o(n^{-1})$, поскольку, например, с учетом этой леммы для первого выражения имеем оценку

$$\gamma_n \mathsf{P}_{n,0}\Big(\Lambda_n(t) = c_n\Big) \le \mathsf{P}_{n,0}\Big(c_n \le \Lambda_n(t) < c_n + n^{-3/2}\Big) =$$

$$= \mathsf{P}_{n,0}\Big(\Lambda_n(t) < c_n + n^{-3/2}\Big) - \mathsf{P}_{n,0}\Big(\Lambda_n(t) < c_n\Big) =$$

$$= \mathcal{O}(n^{-3/2}) + o(n^{-1}) = o(n^{-1}).$$

Теорема 3.3. *Для мощности $\beta_n^*(t)$ критерия уровня $\alpha \in (0,1)$, основанного на логарифме отношения правдоподобия $\Lambda_n(t)$, справедливо асимптотическое разложение* $(0 \le t \le C, \quad C > 0)$

$$\beta_n^*(t) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t^2}{6\sqrt{n}}\varphi(t - u_\alpha) -$$

$$- \frac{t}{12n}\Big(\frac{t^4}{6} - \frac{t^2}{3} - 1 - u_\alpha\Big(\frac{t^3}{6} - u_\alpha + t\Big)\Big)\varphi(t - u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

Доказательство. Подберем критическое значение $c_{n,t}$, исходя из условия

$$\mathsf{P}_{n,0}\Big(\Lambda_n(t) > c_{n,t}\Big) = \alpha + o(n^{-1}). \qquad (3.9)$$

Согласно первому утверждению Леммы 3.2 из этого условия следует, что должно быть

$$1 - \Phi\Big(\frac{c_{n,t}}{t} + \frac{t}{2}\Big) - \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{c_{n,t}}{t} - \frac{t}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{c_{n,t}}{t} + \frac{t}{2}\Big) -$$

$$- \frac{1}{6n}\varphi\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big)\Big(\frac{t^2}{2}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{2t}{3}\Big) - \frac{t^2}{12}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big)^2\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big) -$$

$$- t\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big)^2 + t + \frac{1}{2}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big)^3 - \frac{3}{2}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big)\Big) = \alpha + o(n^{-1}). \tag{3.10}$$

Будем искать $c_{n,t}$ в виде

$$c_{n,t} = tu_\alpha - \frac{t^2}{2} + \frac{a_t}{\sqrt{n}} + \frac{b_t}{n}, \tag{3.11}$$

тогда

$$\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2} = u_\alpha + \frac{a_t}{t\sqrt{n}} + \frac{b_t}{tn},$$

и

$$\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2} = u_\alpha - t + \frac{a_t}{t\sqrt{n}} + \frac{b_t}{tn}.$$

Теперь для определения коэффициентов a_t, b_t из равенства (3.10), получаем

$$1 - \Phi(u_\alpha) - \varphi(u_\alpha)\Big(\frac{a_t}{t\sqrt{n}}+\frac{b_t}{tn}\Big) + \frac{1}{2}u_\alpha\varphi(u_\alpha)\frac{a_t^2}{t^2 n} -$$

$$- \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(u_\alpha - t + \frac{a_t}{t\sqrt{n}}\Big)\Big(\varphi(u_\alpha) - u_\alpha\varphi(u_\alpha)\frac{a_t}{t\sqrt{n}}\Big) -$$

$$- \frac{1}{6n}\varphi(u_\alpha)\bigg(\frac{t^2}{2}\Big(u_\alpha+\frac{t}{6}\Big) - \frac{t^2}{12}(u_\alpha - t)^2 u_\alpha - tu_\alpha^2 + t + \frac{1}{2}u_\alpha^3 - \frac{3}{2}u_\alpha\bigg) =$$

$$= \alpha + o(n^{-1}),$$

откуда имеем

$$a_t = \frac{1}{6}(t^3 - t^2 u_\alpha),$$

$$b_t = -\frac{t}{6}\Big(\frac{t^3}{4} + \frac{t^2 u_\alpha}{3} - tu_\alpha^2 + \frac{u_\alpha^3}{2} + t - \frac{3u_\alpha}{2}\Big),$$

и значит

$$c_{n,t} = tu_\alpha - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3 - t^2 u_\alpha}{6\sqrt{n}} -$$

$$- \frac{t}{6n}\Big(\frac{t^3}{4} + \frac{t^2 u_\alpha}{3} - tu_\alpha^2 + \frac{u_\alpha^3}{2} + t - \frac{3u_\alpha}{2}\Big). \tag{3.12}$$

Для получения асимптотического разложения для мощности $\beta_n^*(t)$ применим второе утверждение Леммы 3.2

$$\beta_n^*(t) = \mathsf{P}_{n,tn^{-1/2}}\Big(\Lambda_n(t) > c_{n,t}\Big) =$$

$$= 1 - \Phi\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big) - \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big) -$$

$$- \frac{1}{6n}\varphi\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big)\Big(\frac{t^2}{2}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{2t}{3}\Big) - \frac{t^2}{12}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}+\frac{t}{2}\Big)^2\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big) +$$

$$+\,t\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big)^2\;-\;t\;+\;\frac{1}{2}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big)^3\;-\;\frac{3}{2}\Big(\frac{c_{n,t}}{t}-\frac{t}{2}\Big)\bigg)\;+\;o(n^{-1}).$$

Подставляя в это равенство значение $c_{n,t}$ (3.12), получим

$$\beta_n^*(t)\;=\;\Phi(t-u_\alpha)\;-\;\frac{t^2}{6\sqrt{n}}\varphi(t-u_\alpha)\,-$$

$$-\;\frac{t}{12n}\Big(\frac{t^4}{6}-\frac{t^2}{3}-1-\frac{t^3u_\alpha}{6}+u_\alpha^2-tu_\alpha\Big)\varphi(t-u_\alpha)\;+\;o(n^{-1}).$$

Теорема доказана. □

Замечание 3.2. В работе [1] при проверке условия (3.14) была использована формула (3.32), которая неверна (см. Лемму 3.5 ниже). Правильное доказательство получается с использованием следующих лемм.

Лемма 3.4. *Для любого $x>0$ справедливо следующее неравенство:*

$$\mathsf{P}_{n,0}\big(\sqrt[4]{n}|\Delta_n(t)|\,\mathfrak{e}\,x\big)\;\le\;Ce^{-x},\quad C\;>\;0.$$

Доказательство. Рассматриваемую вероятность, учитывая неравенство Чебышева, можно представить в виде

$$\mathsf{P}_{n,0}\big(\sqrt[4]{n}|\Delta_n(t)|\,\mathfrak{e}\,x\big)\;=\;\mathsf{P}_{n,0}\big(\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\,\mathfrak{e}\,x\big)\;+$$

$$+\,\mathsf{P}_{n,0}\big(-\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\,\mathfrak{e}\,x\big)\;=\;\mathsf{P}_{n,0}\big(\exp\{\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\}\,\mathfrak{e}\,\exp\{x\}\big)+$$

$$+\,\mathsf{P}_{n,0}\big(\exp\{-\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\}\,\mathfrak{e}\,\exp\{x\}\big)\;\le$$

$$\le\;e^{-x}\Big(\mathsf{E}_{n,0}\exp\{\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\}\;+\;\mathsf{E}_{n,0}\exp\{-\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\}\Big).$$

Теперь в формуле (3.7) из работы [1] возьмем $s\;=\;-i$ и $s\;=\;i$, получим

$$\mathsf{E}_{n,0}\exp\{\pm\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\}\;=\;\exp\Big\{\frac{t^3}{3}\;+o(1)\Big\},$$

отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 3.5. *Для любого $m\;>\;0$ справедливо соотношение*

$$\mathsf{E}_{n,0}\big|\Delta_n(t)\big|^m\;=\;\mathcal{O}\big(n^{-m/4}\big).$$

Доказательство. Учитывая предыдущую лемму и формулу интегрирования по частям, (см. [3], лемма 5.6.1, стр. 178) имеем

$$\mathsf{E}_{n,0}\big|\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\big|^m\;=\;\int_0^\infty\mathsf{P}_{n,0}\Big(\sqrt[4]{n}\Delta_n(t)\,\mathfrak{e}\,x^{1/m}\Big)dx.$$

Теперь опять согласно этой лемме последний интеграл не превосходит выражения

$$C\int_0^\infty\exp\big\{-x^{-1/m}\big\}dx\;\le\;C_1\;<\;\infty,\qquad C,\quad C_1\;>\;0.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Проверим теперь условие (3.14) из работы [1]. Имеем

$$\mathsf{E}_{n,0}|\Delta_n(t)|\,\mathbf{1}_{(\gamma n^{-\delta/2},A)}(|\Delta_n(t)|) \;\le\; A\,\mathsf{E}_{n,0}\,\mathbf{1}_{(\gamma n^{-\delta/2},A)}(|\Delta_n(t)|) \;\le$$

$$\le\; A\,\mathsf{P}_{n,0}\Big(|\Delta_n(t)| \geqslant \gamma n^{-\delta/2}\Big) \;=\; A\,\mathsf{P}_{n,0}\Big(\sqrt[4]{n}|\Delta_n(t)| \geqslant \gamma n^{1/4-\delta/2}\Big).$$

Для оценки этой вероятности применим Лемму 3.4, из которой следует, что она не превосходит величины

$$C\exp\big\{-\gamma n^{1/4-\delta/2}\big\} \;=\; o\big(n^{-\delta}\big),\; C \;>\; 0,\; 0 \;\le \delta \;<\; \frac{1}{2}.$$

Итак, условие (3.14) из работы [1] выполнено.

Список литературы

[1] Королев Р. А., Тестова А. В., Бенинг В. Е. О мощности асимптотически оптимального критерия в случае распределения Лапласа // Вестник Тверского государственного университета, серия «Прикладная математика», 2008, выпуск 8, номер 4(64), стр. 5 – 23.

[2] Albers W. Asymptotic expansions and the deficiency concept in statistics.– Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1974, 145 p.

[3] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984, 751 стр.

[4] Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964, 498 стр.

[5] Chibisov D. M., van Zwet W. R. On the Edgeworth expansion for the logarithm of the likelihood ratio. I // Теория Вероятностей и ее Применения, 1984, том 29, выпуск 3, стр. 417 – 439.

[6] Molenaar W. Approximations to the Poisson, binomial and hypergeometric distribution functions. – Mathematical Centre, Amsterdam, 1970, 160 p.

[7] Бенинг В. Е., Королёв В. Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее Применения, 2008, т. 2, выпуск 2, стр. 19 – 34.